Université P. et M. Curie
Licence de Mathématiques
LM360

Lundi 8 janvier 2007

Topologie et Calcul Différentiel

Durée 3 heures – sans document

Dans tout le sujet, la différentielle d'une fonction f définie sur un ouvert U d'un espace de Banach E à valeurs dans un espace de Banach F en un point x de U sera toujours notée $f'(x)$, et non Df_x, et sa valeur sur un vecteur h de E sera notée $f'(x).h$.

I

Soient $\mathscr{M}(n)$ l'espace vectoriel des matrices réelles (n,n) et f la fonction de $\mathscr{M}(n)$ dans $\mathscr{M}(n)$ définie par $f(M) = (\operatorname{tr} M)\cdot M$, où $\operatorname{tr} M$ désigne la trace $\sum_i m_{i,i}$ de la matrice $M = (m_{i,j})$.

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{M}(n)$, et calculer $f'(A)$ et $f''(A)$, pour $A \in \mathscr{M}(n)$.

II

Soit u une application linéaire non identiquement nulle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. On veut montrer qu'il existe n vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de norme 1 et deux à deux orthogonaux dont les images aient toutes même norme.

Pour x et y dans $\mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de x et y, et $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

1) Montrer que la fonction $\nu : x \mapsto \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et que, pour $h \in \mathbb{R}^n$, on a $\nu'(x).h = 2\langle x, h\rangle$.

2) On définit la fonction f sur $E = (\mathbb{R}^n)^n$ par

$$f(X) = \prod_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^2 \qquad \text{où } X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que, si $f(X) \neq 0$, on a pour $H = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$

$$\frac{1}{f(X)} f'(X).H = \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{\|u(x_j\|^2} \langle u(x_j), u(h_j)\rangle$$

3) Pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ et $X \in E$, on pose $\varphi_{i,j}(X) = \begin{cases} \langle x_i, x_j\rangle & \text{si } i < j \\ \langle x_i, x_i\rangle - 1 & \text{si } i = j \end{cases}$. Montrer que les fonctions $\varphi_{i,j}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer leurs différentielles.

4) Montrer que l'ensemble O_n des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de norme 1 et deux à deux orhogonaux est une partie compacte de E, et que

$$O_n = \{X \in E : \varphi_{i,j}(X) = 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\} .$$

5) Montrer qu'il existe un $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in O_n$ tel que $f(X) > 0$.

6) Montrer que la fonction f atteint sur O_n un maximum strictement positif en un point $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, et enfin qu'il existe des nombres réels $(\lambda_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ tels que, pour tout $H = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in E$, on ait

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{2}{\|u(a_j)\|^2} \langle u(a_j), u(h_j)\rangle = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \lambda_{i,j} \big(\langle a_i, h_j\rangle + \langle h_i, a_j\rangle\big)$$

7) On fixe i et j avec $i < j$. Montrer, en prenant $h_j = a_i$, $h_i = -a_j$ et $h_k = 0$ pour $k \notin \{i, j\}$, qu'on doit avoir

$$\left(\frac{1}{\|u(a_i)\|^2} - \frac{1}{\|u(a_j)\|^2}\right)\langle u(a_i), u(a_j)\rangle = 0$$

et en déduire que si les vecteurs $u(a_i)$ et $u(a_j)$ n'ont pas la même norme, ils sont orthogonaux.

8) On suppose que $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in O_n$, que $f(X) > 0$, que $\langle u(x_i), u(x_j)\rangle = 0$ et que $\|u(x_i)\| \neq \|u(x_j)\|$. On pose alors $x'_i = \dfrac{x_i + x_j}{\sqrt{2}}$, $x'_j = \dfrac{x_i - x_j}{\sqrt{2}}$ et $x'_k = x_k$ pour $k \notin \{i, j\}$. Montrer que $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \in O_n$ et que

$$\|u(x'_i)\|^2 = \left\|u(x'_j)\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|u(x_i)\|^2 + \|u(x_j)\|^2\right) > \|u(x_i)\| \cdot \|u(x_j)\|$$

En déduire que $f(X') > f(X)$.

9) Montrer que les vecteurs $\left(u(a_j)\right)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ ont tous même norme.

III

On note F l'espace de Banach des applications continues f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme : $\|f\|_0 = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

On note E l'espace de Banach des fonctions y de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 et en 1, muni de la norme $\|y\| = \sup_{t\in[0,1]} |y''(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |y'(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |y(t)|$.

On considère l'application $\varphi : E \to F$ définie par $\varphi(y) = y'' + h \cdot y'^2 + k \cdot y^2$, où h et k sont deux fonctions réelles continues données sur $[0,1]$.

1) Montrer que l'application $\Phi : E \times E \to F$ définie par $\Phi(y, z) = h \cdot y' \cdot z' + k \cdot y \cdot z$ est bilinéaire continue.

2) Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur E et calculer la différentielle $\varphi'(0)$ de φ en 0.

3) Montrer que $\varphi'(0)$ est un isomorphisme de E sur F.

4) Déduire de ce qui précède qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute fonction $f \in F$ vérifiant $\|f\|_0 < \varepsilon$, il existe un $y \in E$ tel que $\varphi(y) = f$, c'est-à-dire une solution de l'équation différentielle $y'' + h(x)y'^2 + k(x)y^2 = f(x)$ qui s'annule en 0 et en 1.