Université de Paris 6 Année 2006-2007

Licence de Mathématiques

LM 360

Topologie et Calcul Différentiel

06 Juin 2007

Problème 1 : Les questions a) et b) sont indépendantes

a) Soit $f :]0, +\infty[^2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = \frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}, \ \forall x > 0, \ \forall y > 0 \quad .$$

Montrer que f admet un maximum absolu sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$ de $\mathbb{R}^2$ et le déterminer.

b) Calculer les extrêma absolus de $g : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sur la sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, définie sur $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2+z^3 > 0\}$, voisinage ouvert de S^2 dans $\mathbb{R}^3$, par l'expression :

$$g(x, y, z) = xyz + \mathrm{Log}(2+z^3), \ \forall (x, y, z) \in V \quad .$$

(on pourra montrer qu'ils vérifient $z(y^2 - x^2) = 0$).

Problème 2

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{|t| \to \infty} f(t) = 0$ et $|f'(t)| < 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$. On considère $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

avec $u(x, y) = x + f(y)$, $v(x, y) = y + f(x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Montrer que g est un C^1 difféomorphisme local au voisinage de tout $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$.

b) Soit $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x, y) = (a - u(x, y))^2 + (6 - v(x, y))^2$,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \ell = \inf\{\psi(x, y) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \quad .$$

T.S.V.P. .../...

Montrer que s'il existe un point critique (x_o , y_o) de ψ , alors $\psi (x_o , y_o) = 0$. Vérifier que

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \ \ell \leq \psi (x, y) \leq \ell+1\}$ est compact.

Montrer qu'il existe $(x_1 , y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\ell = \psi (x_1 , y_1)$ et que $\ell = 0$; en déduire la surjectivité de g .

c) Vérifier l'injectivité de g (utiliser le théorème des accroissements finis à partir de $g (x, y) = g (x', y')$).

d) En déduire que g est un difféomorphisme de classe $C^1 (\mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^2)$.