Université de Paris 6 Année 2006-2007

Topologie et Calcul Différentiel

(Licence de Mathématiques)

27 Juin 2007

Le problème est divisé en deux parties.

Soit $\mathcal{M}_2$ l'algèbre réelle (espace vectoriel réel pour l'addition des vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, ayant en plus une structure d'anneau permettant la multiplication de deux vecteurs qui soit distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition de vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel) des matrices carrées d'ordre 2 (c'est-à-dire avec deux lignes et deux colonnes de nombres réels) à coefficients réels.

Question préliminaire

Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(M) = 2 \sup \{ |V_i| \ ; i = 1, 2\}$

avec $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_3 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ m_4 \end{pmatrix}$ et $\left\| \begin{pmatrix} m \\ m' \end{pmatrix} \right\| = \sup \{ |m|, |m'| \}$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2$ vérifiant :

$$\varphi(M\,M') \le \varphi(M) \,.\, \varphi(M'), \ \forall M \in \mathcal{M}_2, M' \in \mathcal{M}_2 \ \text{ et } \ \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \ .$$

On dit que m_2 est une algèbre réelle normée.

Première partie

1) Montrer que l'application $\mathfrak{J} = \mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$\mathfrak{J}\left(\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}\right) = (m_1, m_2, m_3, m_4)$$

est une isométrie linéaire (c'est-à-dire une application linéaire, bijective, conservant la norme) sachant que

$$\| (m_1, m_2, m_3, m_4) \| = 2 \sup \{ |m_i| \ ; 1 \le i \le 4\}$$

est la norme de (m_1, m_2, m_3, m_4) choisie sur $\mathbb{R}^4$.

2) Soit $h = \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_2$ définie par

$$h((m_1, m_2, m_3, m_4) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}(m_1^2+m_2) & m_2^2+3m_4 \\ \operatorname{sh} m_3 & m_1 \end{pmatrix}$$

pour tout $(m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{R}^4$.

Montrer que $h \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ et calculer

$$D\,h(m_1, m_2, m_3, m_4) \bullet (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

et

$$D^2h(m_1, m_2, m_3, m_4)\,\{(u_1, u_2, u_3, u_4), (v_1, v_2, v_3, v_4)\}$$

pour tout $(m_1, m_2, m_3, m_4), (u_1, u_2, u_3, u_4), (v_1, v_2, v_3, v_4)$ dans $\mathbb{R}^4$ en calculant auparavant les dérivées partielles classiques $\frac{\partial h}{\partial m_1}, \frac{\partial h}{\partial m_2}, \frac{\partial h}{\partial m_3}, \frac{\partial h}{\partial m_4}, \frac{\partial^2 h}{\partial m_i \partial m_j}$ $(1 \le i, j \le 4)$ au point (m_1, m_2, m_3, m_4).

En déduire, à l'aide du résultat de 1) que l'application $k : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ définie par $k = h \circ \mathfrak{J}$ est de classe $C^\infty(\mathcal{M}_2)$ et calculer $Dk\left(\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}\right) \bullet \left(\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}\right)$ pour tout $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2$.

Montrer que k est un difféomorphisme de classe $C^\infty(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2)$.

Deuxième partie

1) Soit $P : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ définie par $P(M) = M^2$ pour tout $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2$.

Montrer que P est différentiable sur $\mathcal{M}_2$ et que $DP(M) \bullet N = MN + NM$, tout M et N dans $\mathcal{M}_2$ (on pourra développer $P(M+N) - P(M)$).

En déduire que P est un difféomorphisme au voisinage de $M = I$ matrice unité à 2 lignes et 2 colonnes, sachant que le difféomorphisme réciproque (ou inverse) au voisinage de $I = P(I)$, noté Q, vérifie $Q(I) = I$.

T.S.V.P. …/…

2) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ telle que $\varphi(0,0) = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0,0) = r$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y}(0,0) = s$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0,0) = t$.

a) En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la colonne des composantes de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et ${}^t(\mathbb{R}^2)$ l'espace des $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ lorsque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, montrer qu'il existe $A : {}^t(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{M}_2$ telle que $A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ et $\varphi(x, y) = {}^tX \, A(X) \, X$ (produit matriciel double de la ligne ${}^tX = (x, y)$ par la matrice symétrique $A(X)$ de $\mathcal{M}_2$ et par la colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (on pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 au point $(0, 0)$ pour φ).

b) Si $rt - s^2 \neq 0$, montrer qu'il existe un ouvert U de ${}^t(\mathbb{R}^2)$ contenant $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $R : U \subset {}^t(\mathbb{R}^2) \to {}^t(\mathbb{R}^2)$ un C^1 difféomorphisme sur U tel que

$$\varphi((x, y)) = {}^t[R(X)] \; H \; [R(X)]$$

(produit matriciel double) pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U$.

(Utiliser 2) a), $B(X) = H^{-1} A(X)$ et avec le résultat de 1), vérifier l'existence de $C(X) = Q\{B(X)\}$ pour établir l'égalité $HC^2 = {}^tC \, H \, C$ et déduire l'expression de R).