Université P. et M. Curie
Licence de Mathématiques
LM360

Jeudi 13 décembre 2007

Topologie et Calcul Différentiel

Durée 3 heures – sans document

Dans tout le sujet, la différentielle d'une fonction f définie sur un ouvert U d'un espace de Banach E à valeurs dans un espace de Banach F en un point x de U sera toujours notée $f'(x)$, (notée $Df(x)$ dans le cours de LM360A), et sa valeur sur un vecteur h de E sera notée $f'(x).h$. On note $\mathscr{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans lui-même (noté $\mathscr{L}(E,E)$ dans le cours de LM360A).

I

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, U un voisinage ouvert de K et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe un voisinage V de K, convexe ouvert et relativement compact tel que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$. On pose, pour $t \geqslant 0$,

$$f_t = I + tf \ ,$$

où $I : x \mapsto x$ est l'identité de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que $M = \sup\{\|Df(x)\| : x \in \overline{V}\}$ existe et que, pour tout $y \in \overline{V}$,

$$\|x - y\| \leqslant \|f_t(x) - f_t(y)\| + tM\,\|x - y\| \ .$$

2) On pose $t_0 = \dfrac{1}{M}$. Déduire de ce qui précède que pour tout $t \in [0, t_0[$, la restriction de f_t à $\overline{V}$ est injective.

On suppose désormais que $t \in [0, t_0[$.

3) Montrer que la restriction de f_t à $\overline{V}$ est un homéomorphisme de $\overline{V}$ sur $f_t(\overline{V})$.

4) Montrer que pour tout $x \in V$, $Df_t(x) = I + tDf(x)$ est inversible si $0 \leqslant t < t_0$.

5) En déduire que la restriction de f_t à V est un difféomorphisme (de classe $\mathscr{C}^1$) de V sur $f_t(V)$.

II

On considère la fonction ρ définie sur $J =]-1, +\infty[$ par $\rho(x) = \sqrt{1+x}$.

1) Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J et que $\rho^{(k)}(0) = k!\,\alpha_k$, où α_k est la suite définie par $\alpha_0 = 1$ et, pour $k \geqslant 0$,

$$\alpha_{k+1} = \frac{1-2k}{2(k+1)} \cdot \alpha_k$$

Montrer que $|\alpha_{k+1}| < |\alpha_k| \leqslant 1$ pour tout k.

2) Au moyen de la formule de Taylor, montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, on a

$$\left|\rho(x) - \sum_{n=0}^{k} \alpha_n x^n\right| \leqslant \alpha_{k+1} \frac{|x^{k+1}|}{(1-|x|)^{k+1/2}} \leqslant \left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{k+1}$$

et en déduire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ converge normalement sur $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ vers ρ.

3) Montrer que si $|x| \leqslant \frac{1}{3}$, on a :

$$1 + x = \rho(x)^2 = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} \alpha_k\, \alpha_\ell\, x^{k+\ell} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \Big(\sum_{k=0}^{m} \alpha_k\, \alpha_{m-k}\Big)$$

puis que, pour $m \geqslant 2$, on a $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k\, \alpha_{m-k} = 0$.

4) Soit φ la fonction : $t \mapsto (1+t)^{3/2}(1 - \frac{3}{2}t)$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi'(t) \leqslant 0$ pour $t > 0$ et en déduire que $\varphi(t) \leqslant 1$ si $t \geqslant 0$.

On pose $\beta_k = (k+1)^{3/2}\, \alpha_k$. Montrer que $\left|\frac{\beta_{k+1}}{\beta_k}\right| = \varphi(\frac{1}{k+1})$, et en déduire que $|\beta_k| \leqslant \beta_0 = 1$ pour tout entier k, puis que $|\alpha_k| \leqslant \frac{1}{(k+1)^{3/2}}$.

5) Soient E un espace de Banach, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\|u\| \leqslant 1$. On notera I l'application identique de E, et on posera $u^0 = I$. Montrer que la série $R(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, u^n$ converge normalement dans $\mathscr{L}(E)$, et que

$$R(u)^2 = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} \alpha_k\, \alpha_\ell\, u^{k+\ell} = \sum_{m=0}^{\infty} u^m \Big(\sum_{k=0}^{m} \alpha_k\, \alpha_{m-k}\Big) = I + u\ .$$

En déduire que si $v \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $\|v - I\| \leqslant 1$, il existe $r \in \mathscr{L}(E)$ tel que $r^2 = v$.

6) Montrer par récurrence sur l'entier n que la fonction $p_n : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ définie par $p_n(u) = u^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que

$$p_n'(u).h = \sum_{k=1}^{n} u^{k-1} \circ h \circ u^{n-k}\ ,$$

puis que $\|p_n'(u)\| \leqslant n\, \|u\|^{n-1}$, et enfin que la série $\sum_{n=0}^{\infty} p_n'(u)$ converge uniformément sur la boule $\{u \in \mathscr{L}(E) : \|u\| \leqslant 1 - \delta\}$, pour tout $\delta > 0$.

En déduire que la fonction R est de classe $\mathscr{C}^1$ sur la boule $\{u \in \mathscr{L}(E) : \|u\| < 1\}$.