Année 2007 – 2008 Université Paris 6

L M 360
Topologie et Calcul Différentiel
Ecrit du 27/05/2008

Les problèmes I et II sont indépendantes.

I

Soit E l'espace des fonctions réelles définies sur $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ et lipschitziennes, c'est à dire telles que

$$\sup_{(x,y)\in I\times I,\ x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = K(f) < +\infty$$

où $K(f)$ est une constante finie positive ou nulle ne dépendant que de f.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $C^0(I,\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $I = [0,1]$ et que

$$K(\lambda f + \mu g) \leq |\lambda| K(f) + |\mu| K(g)$$

$$|K(f) - K(g)| \leq K(f-g)$$

si f et $g \in E$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

Montrer que les fonctions réelles continues sur $[0,1]$, admettant des dérivées à droite $f'_d(z) = \lim_{h>0,\ h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ classiques bornées ($\forall z \in]0,1[$), appartiennent à E.

(On admettra qu'elles vérifient l'inégalité des accroissements finis

$|f(y) - f(x)| \leq \sup_{z\in]x,y[} |f'(z)|\ |x-y|$, $\forall\ 0 < x < y < 1$).

2) Pour chaque $f \in E$, on pose

$$M(f) = \sup_{x\in I} |f(x)| \ \text{ et } N(f) = M(f) + K(f)$$

Montrer que $N : f \mapsto N(f)$ est une norme sur E mais que $K : f \mapsto K(f)$ n'est pas une normes sur E.

3) Montrer que les normes M et N ne sont pas équivalentes.

(Pour cela on cherchera à construire une suite de fonctions f_n telle que $K(f_n)$ soit fixe tandis que $\lim_{n\to\infty} M(f_n) = 0$).

4) Montrer que (E,N) est complet.

(On rappelle que $(C^0(I,\mathbb{R}), M)$ est complet et on considèrera une suite de Cauchy

$(f_n)_n$ sur E pour la norme N et $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ pour M dans $C^0(I, \mathbb{R})$; en déduire que pour $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ indépendant de $x \neq y$ dans I tel que :

$$p \geq N, q \geq N \text{ implique } \frac{|f_p(x) - f_q(x) - (f_p(y) - f_q(y))|}{|x-y|} \leq \epsilon, \ \forall x \neq y$$

puis que $f - f_n \in E$ et $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ pour N dans E).

II

On rappelle le théorème des fonctions implicites.

Soient E, F et G trois espaces de Banach réels, U un ouvert de $E \times F$ et f une application de classe $C^m(U)$ $(m \geq 1)$ de U dans G notée $(x,y) \mapsto f(x,y)$,$(x,y) \in U$, $x \in E, y \in F$.

Soit $(a,b) \in U$.

On suppose que la différentielle partielle $D_y f(a,b)$ de l'application f par rapport à la seconde variable vectorielle $y \in F$, au point (a,b), soit un isomorphisme de F sur G.

Alors il existe un voisinage ouvert V de (a,b) dans $E \times F$, $V \subset U$, un voisinage ouvert W de a dans E, et une application h de classe C^m de W dans E unique avec $h(a) = b$, tels que les assertions suivantes (i) et (ii) soient équivalentes :

$$(i) \text{ le couple } (x,y) \in V \text{ et } f(x,y) = f(a,b)$$

$$(ii) \text{ le point } x \in W \text{ et } y = h(x).$$

1) a) Montrer qu 'il existe un voisinage ouvert V' de (a,b) dans $E \times F$, $V' \subset V$ tel que $D_y f(x, h(x)) \in Isom(F, G)$ pour tout $x \in V'$.

b) En remarquant que $f(x, h(x)) = f(a,b)$, $\forall x \in V'$ et en différentiant cette identité par rapport à x sur V', montrer que

$$Dh(x) = -[D_y f(x, h(x))]^{-1} \circ D_x f(x, h(x))$$

pour tout $x \in V'$.

c) Dans le cas où $f : U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ est $C^m(U)$ $(m \geq 1)$ avec $D_y f(a,b) \in GL(\mathbb{R}^q)$ exprimer la jacobienne de h au point x notée $J_h f(x)$ à l'aide des jacobiennes partielles de f au point $(x, h(x))$ notées $J_x f(x, h(x))$ et $J_y f(x, h(x))$, $\forall x \in V'$.

2) On considère les fonctions f, g, h définies sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}\backslash 0)^3$ de $\mathbb{R}^6$ par les expressions

$$f(u,v,w,x,y,z) = u + v + w + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$g(u,v,w,x,y,z) = u^2 + v^2 + w^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

$$h(u,v,w,x,y,z) = u^3 + v^3 + w^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}.$$

a) Montrer que le système des 3 équations scalaires

$$f(u,v,w,x,y,z) = -1$$

$$g(u,v,w,x,y,z) = 5$$

$$h(u,v,w,x,y,z) = -1$$

définit implicitement $u = r(x,y,z), v = s(x,y,z), w = t(x,y,z)$ en fonctions respectives r, s et t de x, y, z au voisinage du point $M_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, -1, -1)$ de telle façon que

$$r(1,-1,-1) = 0$$

$$s(1,-1,-1) = 1$$

$$t(1,-1,-1) = -1$$

Vérifier que r, s, t sont de classe C^∞ au voisinage de M_0.

b) Calculer des différentielles des fonctions r, s, t au point M_0.