Examen, 8 janvier 2007

Intégration et théorie de la mesure LM363

Durée 3 heures. Documents interdits

Exercice 1 Soit $f : [0,1] \mapsto [0,+\infty[$ borélienne et $A \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble :

$$A := \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, \quad y^2 + z^2 \le f(x)\}$$

1. Prouver que l'application

$$F : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad F(x,y,z) := y^2 + z^2 - f(x)$$

   est borélienne et en déduire que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.
2. Pour tout $x \in [0,1]$ déterminer la section $A_x := \{(y,z) : (x,y,z) \in A\}$. Vérifier que $A_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et calculer sa mesure de Lebesgue $\lambda_2(A_x)$.
3. Calculer le volume $\lambda_3(A)$ de A en fonction de f.
4. Vérifier que $\lambda_3(A) = \frac{\pi}{4}$, si $f(x) = x^3$, $x \in [0,1]$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}_+ \mapsto [0,1]$ la fonction

$$f(x) := e^{-x}, \qquad x \ge 0.$$

1. Prouver que f est borélienne et que pour tout $s > 0$: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f^s \, dx \,=\, \frac{1}{s}$.
   En déduire que

$$\frac{1}{1+t} \;=\; \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx} f(x)\, dx, \qquad t \in [0,+\infty[.$$

2. Montrer par récurrence (avec un argument complet) que

$$\frac{d^k}{dt^k} \frac{1}{1+t} \;=\; (-1)^k \int_{\mathbb{R}_+} x^k e^{-tx} f(x)\, dx, \qquad \forall\, t \in [0,\infty[,\ k \in \mathbb{N}.$$

3. Calculer directement par récurrence $\displaystyle\frac{d^k}{dt^k} \frac{1}{1+t}$ et en déduire que

$$\int_0^\infty x^k e^{-x}\, dx \;=\; k! \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

4. Prouver que pour toute $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ borélienne on a :

$$\int_0^\infty g(e^{-x})\, e^{-x}\, dx \;=\; \int_0^1 g(y)\, dy. \tag{2}$$

5. En déduire que :

$$\int_0^1 |\ln y|^k\, dy \;=\; k! \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Exercice 3 On considère ici l'espace mesuré $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$.

1. Dire pour quels $p \in [1,+\infty]$ on a $f \in L^p$ et pour quels $p \in [1,+\infty]$ on a $f \notin L^p$ dans les cas :
   – pour $\alpha > 0$, $f(x) := x^{-\alpha}$, $x \in]0,1]$
   – $f(x) := \ln x$, $x \in]0,1]$ (on pourra utiliser la formule (3) ci-dessus).
2. Donner un exemple d'une suite $(g_k)_k$ telle que $g_k \in L^1$ pour tout k mais pour tout $p > 1$ il existe k tel que $g_k \notin L^p$.
3. Construire, à l'aide de la suite du point précédent, un exemple d'une $g \in L^1$ telle que $g \notin L^p$ pour tout $p > 1$.

Exercice 4 Soient f_n, f fonctions mesurables positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ avec $f \in L^1$. On suppose que :

$$f \le \liminf_{n\to\infty} f_n \qquad \mu-\text{p.p.}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \le \int f\, d\mu.$$

1. Prouver que
$$\int f\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$
et en déduire que
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu.$$
2. Prouver que $\mu-$p.p. $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$.
3. Prouver que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $|a-b| = a + b - 2\min\{a,b\}$ et en déduire que $f_n \to f$ dans L^1 si $n \to \infty$.
4. Montrer que f_n ne converge pas nécessairement vers f $\mu-$p.p.