LM 363 D.Dehen 2006-2007

Théorie de la mesure et intégration.

Examen du 6 juin 2007

Documents et calculatrice sont interdits. Durée 3 heures.

Dans les exercices **I** *et* **II**, $\mathbb{R}$ *est muni de la mesure de Lebesgue.*

I

a. Montrer que la fonction $F : x \to \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-itx}}{\sqrt{t(1+t^2)}} dt$ est définie, bornée, et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Est-ce que le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre permet de dire que F est dérivable? Pourquoi?

c. Montrer que $F_1(x) = \int_{\mathbb{R}+} \frac{\sin tx}{(t(1+t^2))^{1/2}} dt$ n'est pas dérivable en 0, en utilisant le rapport $F_1(x)/x$, et en admettant que $0 < \int_{\mathbb{R}+} \frac{\sin u}{u^{3/2}} du$. Conclure la même propriété pour F.

d. Si a et b sont des réels, vérifier que $\int \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\, e^{-itx} dt$ tend vers 0 si $x \to \infty$, où $\mathbb{1}_{[a,b]}$ est la fonction indicatrice (ou caractéristique) de $[a, b]$. En déduire que $F(x)$ tend vers 0, si $x \to \infty$.

II

1. Montrer que la fonction $t \to \exp(-t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et que $A = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\, dt$ vérifie $0 < A < \infty$.

On note $\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-(x-t)^2)\, dt$ $(*)$, lorsque cette fonction est définie.

2. Soit f une fonction de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $\tilde{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et vérifie $|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_1$.

b. Montrer que $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

c. Montrer que $\tilde{f}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et que

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, P_n(x-t) \exp(-(x-t)^2)\, dt,$$

où P_n est un polynôme qu'on n'explicitera pas.

d. Montrer que $\tilde{f}$ appartient à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, et que $\|\tilde{f}\|_1 \leq A\|f\|_1$.

3. Pour $p \in]1, \infty[$, soit f une fonction de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $\tilde{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par la formule $(*)$, et vérifie $|\tilde{f}(x)| \leq A_p \|f\|_p$ où A_p est un réel qu'on calculera en fonction de A.

b. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(t) = \frac{nf(t)}{n+e^{t^2}}$. Montrer que f_n appartient à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, et que (f_n) tend vers f dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ pour la semi-norme $\|\ \|_p$ si $n \to \infty$.

En déduire que $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

c. Si q est le conjugué de p (i.e. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), si $g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R})$, montrer en calculant $\tilde{f}$ avec le changement de variable $t = x - u$, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(x)|\ |g(x)|\ dx \leq A \| f\|_p \| g\|_q .$$

En déduire que $g \to \int \tilde{f}(x)\, g(x)\, dx$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{L}^q(\mathbb{R})$.

Question hors examen : conclusion?

III

Soit (X,T,μ) un espace mesuré où μ est une mesure finie (i.e. $\mu(X) < \infty$), et soit f une fonction mesurable de X dans $[0, \infty[$ muni de sa tribu borélienne. On définit α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\alpha(t) = \mu(\{x \in X \ /\ f(x) > t\})$$

1. Montrer que α est une fonction monotone. Montrer que c'est une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et qu'elle tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

2. Montrer que $\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_0^{\infty} \alpha(t)\, dt$

(On pourra utiliser le théorème de Fubini pour la fonction $(x, t) \to \chi(f(x), t)$ où

$\chi(u, v) = 1$ si $u>v$, et $\chi(u, v) = 0$ si $u \leq v$)

Question hors examen : exercice II **3.** Soit f une fonction de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$.

d) Montrer que $\tilde{f}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^{\infty}$.