LM 363 D.Dehen 2006-2007

Théorie de la mesure et intégration.

Examen du 27 juin 2007

Documents et calculatrice sont interdits. Durée 3 heures.
Dans les exercices **I, II** *et* **III**, $\mathbb{R}$ *est muni de la mesure de Lebesgue.*

I

a) Pour quels $p \in [1, \infty]$, les fonctions $t \to f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, et $t \to g(t) = -\mathbb{1}_{[-1,1]}(t).\mathrm{Ln}|t|$ appartiennent-elles à $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'on peut définir pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$H(x) = \int_R f(t)\, g(x-t)\, dt, \quad \text{et que} \quad H(x) = \int_R f(x-t)\, g(t)\, dt.$$

c) Montrer que H est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, qui tend vers 0 si x tend vers $\pm\infty$.

d) Montrer que H est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

e) Montrer que H est une fonction de $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$.

II

a) Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, la fonction définie par $t \to f_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)$ appartient à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. Démontrer que la suite (f_n) converge vers f dans $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, où f est la fonction $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

b) Montrer qu'on peut définir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\hat{f}_n(x) = \int_R e^{-itx} f_n(t)\, dt$ et qu'elle est continue.
On admettra que, si la suite (f_n) est une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, la suite $(\hat{f}_n)$ est aussi de Cauchy dans $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. La suite $(\hat{f}_n)$ est-elle convergente dans $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, pourquoi?

c) Que peut-on dire du produit de convolution $f_n * g$, où g est la fonction définie en **I. a)**, est-ce qu'il appartient à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$? Vérifier qu'on peut définir $\hat{H}_n(u) = \int_R e^{-iux} (f_n * g)(x)\, dx$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, et calculer cette intégrale en fonction de $\hat{f}_n(u)$, et de $\hat{g}(u) = \int_R e^{-itu} g(t)\, dt$.
En déduire que les fonctions $\hat{H}_n$ tendent vers une limite dans $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ (on vérifiera que $\hat{g}$ est une fonction continue bornée.)

III

Soient p appartenant à $]1, \infty[$, et f une fonction appartenant à $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+$ étant muni de la mesure de Lebesgue.
On considère pour $x \in \mathbb{R}_+$ la fonction $F : \quad x \to F(x) = \int_{[0,x]} f(t)\, dt$.

1) Montrer que F est définie et uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que $\int_{[0,x]} |f(t)|^p\, dt$ tend vers 0 quand x tend vers 0_+.

Si q vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, en déduire que $F(x) / x^{1/q}$ tend vers 0 quand x tend vers 0_+. (On remarquera que $\mathbb{1}_{[0,x]} f = \mathbb{1}_{[0,x]} \times \mathbb{1}_{[0,x]} f$)

3) Si q est encore le conjugué de p, si $0 < a < x$, prouver que

$$|F(x) - F(a)| \leq x^{1/q} \left(\int_{[a,\infty]} |f(t)|^p\, dt \right)^{1/p}$$

En déduire que $x^{-1/q} F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

IV

Soit (X, T, μ) un espace mesuré et $p \in [1, \infty[$. On se donne deux suites de fonctions (f_n) et (g_n) avec $f_n \in \mathscr{L}^p(X)$ et g_n mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

i) f_n converge vers f dans $\mathscr{L}^p(X)$ (avec $f \in \mathscr{L}^p(X)$)
ii) g_n converge μ-presque partout vers une fonction $g : X \to \mathbb{R}$
iii) il existe une constante M telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|g_n| \leq M$ μ-p.p.

a) Montrer que $f_n g_n$ et fg appartiennent à $\mathscr{L}^p(X)$.

b) Montrer que $f_n g_n$ converge vers fg dans $\mathscr{L}^p(X)$.

c) Est-ce que f_n converge presque partout vers f sur X.

*A défaut de résoudre le **IV** pour* $p \in [1, \infty[$, *les étudiants pourront traiter le cas* $p=1$.