Examen, 13 décembre 2007

Intégration et théorie de la mesure LM363

Durée 3 heures. Tous documents interdits.

Toute application d'un résultat prouvé ou énoncé pendant le cours doit être signalée et justifiée avec précision.

Exercice 1 Soit $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et pour tout $n \geq 1$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{C}$

$$f_n(t, x, y) := e^{-(n+x)y} \left(e^{iyt} - 1\right).$$

1. Prouver que pour tout $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

$$\sum_{n \geq 1} |f_n(t, x, y)| \leq |t| \frac{y\, e^{-y}}{1 - e^{-y}}$$

et

$$f(t, x, y) := \sum_{n \geq 1} f_n(t, x, y) = \frac{e^{-xy}}{e^y - 1} \left(e^{iyt} - 1\right).$$

2. Montrer que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ on a $y \mapsto f(t, x, y) \in L^1(\mathbb{R}_+, \lambda)$ et

$$\int_0^{+\infty} f(t, x, y)\, dy = \sum_{n \geq 1} \frac{it}{(n + x - it)(n + x)}.$$

3. Soit pour tout $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

$$u(t, x, y) := \frac{e^{-xy}}{e^y - 1} \sin(yt).$$

Prouver que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ on a $y \mapsto u(t, x, y) \in L^1(\mathbb{R}_+, \lambda)$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy}}{e^y - 1} \sin(yt)\, dy = \sum_{n \geq 1} \frac{t}{(n + x)^2 + t^2}.$$

4. Prouver que la fonction $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$

$$g(t, x) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy}}{e^y - 1} \sin(yt)\, dy$$

est de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et satisfait sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ l'équation

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0.$$

Exercice 2 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. Soit f dans $\mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}_+)$, où $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto [0, +\infty]$ définie par $\varphi(t) := \mu(f > t)$. Montrer que $\varphi(t) < +\infty$ pour tout $t > 0$ à l'aide de l'inégalité $f^p \geq t^p \cdot \mathbf{1}_{\{f>t\}}$.
2. Montrer que φ est décroissante, continue à droite sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ soit $A_k := \{t \in \mathbb{R}_+ : \mu(f > t) \leq 2^k\}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $A_k \neq \emptyset$. Soit $t_k := \inf A_k$. Montrer que $t_k \in A_k$.
4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $A_k \subseteq A_{k+1}$ et $t_k \geq t_{k+1}$.
5. Montrer que $]0, \infty[\subseteq \cup_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ et en déduire que $t_k \to 0$ si $k \to +\infty$.
6. Montrer que la fonction $F : X \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ définie par
$$F(x,t) := p\, t^{p-1}\, \mathbf{1}_{\{f(x)>t\}}$$
est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ mesurable.
7. Montrer à l'aide du Théorème de Fubini que
$$\int_{X\times\mathbb{R}_+} F\, d(\mu \otimes \lambda_1) = \|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(f > t) dt.$$
8. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit $c_k := 2^{k/p}\, t_k$. Montrer à l'aide du Théorème de Fubini que
$$p \int_0^\infty t^{p-1} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}:\, t_k>t} 2^k \right) dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^p.$$
9. Pour tout $t > 0$ soit $k(t) := \sup\{k \in \mathbb{Z} : t_k > t\} < +\infty$, avec $\sup \emptyset := -\infty$. Prouver que pour tout $t > 0$
$$2^{k(t)} \leq \mu(f > t) \leq 2^{k(t)+1}$$
et
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}:\, t_k>t} 2^k = 2^{k(t)+1},$$
où par convention $2^{-\infty} := 0$.
10. En déduire que pour tout $t > 0$
$$\frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}:\, t_k>t} 2^k \leq \mu(f > t) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}:\, t_k>t} 2^k$$
et que
$$\|f\|_{L^p}^p \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^p \leq 2\, \|f\|_{L^p}^p.$$