

Corrigé de l'examen de l'unité de Mathématiques LM 151 Université Pierre et Marie Curie.

Responsable: Henri Skoda

septembre 2005.

Question de cours.

Donner la définition de deux suites adjacentes puis énoncer et démontrer le théorème de convergence des suites adjacentes.

Définition

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes**, si on a:

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{u}_n \leq \mathbf{u}_{n+1} \leq \mathbf{v}_{n+1} \leq \mathbf{v}_n$.
- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathbf{v}_n - \mathbf{u}_n) = \mathbf{0}$.

Remarque

On peut remplacer la condition 1) par (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante. La condition 2) entraîne alors que pour tout n , $u_n \leq v_n$. Mais "géométriquement" la condition 1) est plus "visuelle".

Théorème

Deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l telle que:

$$\forall n, u_n \leq l \leq v_n.$$

En effet la suite (u_n) est croissante et majorée par le terme v_0 (par exemple). (u_n) a donc une limite l . De même, la suite (v_n) est décroissante et est

minorée par u_0 . (v_n) a donc une limite l' . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{u}_0 \leq \mathbf{u}_n \leq \mathbf{l} \leq \mathbf{l}' \leq \mathbf{v}_n \leq \mathbf{v}_0$$

(passage à la limite dans les inégalités larges).

et donc :

$$0 \leq l' - l \leq v_n - u_n.$$

Comme $\lim(v_n - u_n) = 0$, on a donc :

$$l' - l = 0.$$

Soit finalement, $l' = l$.

Exercice 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, définie par :

$$f(x) = \sqrt{2+x}.$$

1) Etudier sur $[0, +\infty]$ les variations et le signe de la fonction :

$$g(x) := f(x) - x.$$

En déduire que l'équation : $f(x) = x$ a une solution unique égale à 2 sur $]0, +\infty[$.

On a :

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} - 1 \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 < 0$$

La fonction g décroît donc strictement de $\sqrt{2}$ à $-\infty$ quand x varie de 0 à $+\infty$. g a donc un seul zéro sur $[0, +\infty[$. 2 est manifestement zéro de g ($f(2) = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$). g est donc > 0 à gauche de 2 et strictement négative à droite.

2) On considère la suite (u_n) définie par récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

avec $0 \leq u_0 < 2$.

Montrer que la suite (u_n) est croissante, majorée et converge vers 2.

Comme f est croissante, on sait (cours) que la suite récurrente (u_n) est monotone. Comme $0 \leq u_0 < 2$, on a vu que $g(u_0) > 0$, c'est à dire $f(u_0) - u_0 > 0$, $u_1 > u_0$ la suite (u_n) est strictement croissante. Comme $0 \leq u_0 < 2$, on a aussitôt par récurrence: $u_n < 2$ (car $u_n < 2$ entraîne $f(u_n) < f(2)$, soit $u_{n+1} < 2$).

La suite u_n est croissante et majorée par 2, elle converge donc vers une limite $l \leq 2$. Par continuité de f au point l , l est un point fixe de f situé sur $[0, +\infty[$ donc $l = 2$.

3) On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n := 2 - u_n.$$

a) Montrer que :

$$v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n$$

Par l'application de la formule des accroissements finis sur l'intervalle $[u_n, 2]$, il existe $c_n \in]u_n, 2[$ tel que:

$$v_{n+1} = 2 - u_{n+1} = f(2) - f(u_n) = f'(c_n)(2 - u_n) = f'(c_n)v_n.$$

Comme: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2}$, on a bien:

$$v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n$$

b) Montrer que la suite (w_n) définie par :

$$w_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

est convergente (ne pas chercher à calculer sa limite).

Par récurrence sur n , on a:

$$v_n \leq \frac{1}{2^n} v_0 = \frac{1}{2^n} (2 - u_0)$$

La suite w_n est croissante car $w_{n+1} = w_n + v_{n+1}$ avec $v_n > 0$ de sorte que $w_{n+1} > w_n$ et w_n est majorée par:

$$w_n \leq \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right] v_0 = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} v_0 < 2v_0$$

Elle est donc convergente.

Exercice 2.

1) Calculer la dérivée de la fonction f définie par:

$$f(x) := \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

et en donner une expression simple.

On a, par application de la règle de dérivation des fonctions composées:

$$f'(x) := \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2) Trouver la limite de la suite de terme général u_n définie par:

$$u_n := \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}}$$

On peut réinterpréter u_n comme une somme de Riemann relative à la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$:

$$u_n = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{2}{n})^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{k}{n})^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{n}{n})^2}} \right]$$

$$u_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{k}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]$$

On a donc :

$$\lim_n u_n = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Soit, d'après la question 1):

$$\lim_n u_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$\lim_n u_n = \ln(1 + \sqrt{2})$$

Exercice 3.

Calculer les intégrales:

$$I = \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx$$

On utilise à répétition la formule d'intégration par parties:

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

en intégrant la fonction exponentielle et dérivant le polynôme, soit:

$$u = x^2, dv = e^{-2x} dx,$$

$$du = 2x dx, v = -\frac{1}{2}e^{-2x},$$

$$I = \left[-\frac{1}{2}x^2 e^{-2x}\right]_0^1 + \int_0^1 x e^{-2x} dx$$

$$I = -\frac{1}{2}e^{-2} + \int_0^1 x e^{-2x} dx$$

$$I = -\frac{1}{2}e^{-2} + \left[-\frac{1}{2}x e^{-2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx$$

$$I = -e^{-2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx$$

$$I = -e^{-2} + \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^1 = -e^{-2} - \frac{1}{4}(e^{-2} - 1) = \frac{1}{4}(1 - 5e^{-2})$$

$$I = \frac{1}{4}(1 - 5e^{-2})$$

$$J = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$$

La factorisation de $x^2 + 3x + 2$ s'écrit $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, on a donc:

$$J = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} dx$$

La décomposition en éléments simples de la fraction s'écrit:

$$\frac{1}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2}$$

$$J = \int_0^1 \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2}\right) dx = [\ln(x + 1) - \ln(x + 2)]_0^1$$

$$J = \left[\ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right) \right]_0^1 = \ln \left(\frac{2}{3} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln \left(\frac{4}{3} \right)$$

$$\mathbf{J = \ln \left(\frac{4}{3} \right)}$$

$$K = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \sin^3(x^2) dx$$

Le changement de variable: $t = x^2$, $dt = 2x dx$, donne:

$$K = \int_0^{\pi} \sin^3 t dt = \int_0^{\pi} \sin^2 t d(-\cos t)$$

On peut prendre comme nouvelle variable: $u = -\cos t$, $du = \sin t dt$, $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - u^2$, soit:

$$K = \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\mathbf{K = \frac{4}{3}}$$

$$L = \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x + 1} dx$$

On pose $t = e^x$, $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$, d'où:

$$L = \int_3^8 \sqrt{t+1} \frac{dt}{t}$$

On pose $u := \sqrt{t+1}$, $u^2 = t+1$, $t = u^2 - 1$, $dt = 2udu$, il vient:

$$L = \int_2^3 u \frac{2udu}{u^2 - 1} = \int_2^3 \frac{2u^2}{u^2 - 1} du = \int_2^3 \left(2 + \frac{2}{u^2 - 1} \right) du$$

$$L = \int_2^3 \left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = \left[2u + \ln \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \right]_2^3$$

$$L = 2 + \ln \left(\frac{2}{4} \right) - \ln \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$\mathbf{L = 2 + \ln \left(\frac{3}{2} \right)}$$

Exercice 4.

1) Calculer les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de la fonction définie par:

$$f(x, y) = e^{-x^2y} + e^{-xy^2}$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xy e^{-x^2y} - y^2 e^{-xy^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-x^2y} - 2xy e^{-xy^2}$$

2) Ecrire l'équation du plan tangent à la surface de \mathbb{R}^3 d'équation:

$$z = f(x, y)$$

au point $(1, 1, 2e^{-1})$.

L'équation du plan tangent au point (x_0, y_0, z_0) s'écrit:

$$z - z_0 = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

soit au point $(1; 1, 2e^{-1})$:

$$z - 2e^{-1} = -3e^{-1}(x - 1) - 3e^{-1}(y - 1)$$

$$z = 2e^{-1} - 3e^{-1}(x + y - 2) = e^{-1}(-3x - 3y + 8)$$

$$\mathbf{z = e^{-1}(-3x - 3y + 8)}$$

3) Chercher les extrema éventuels de f .

Ils correspondent à:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Soit:

$$-2xy e^{-x^2y} - y^2 e^{-xy^2} = -x^2 e^{-x^2y} - 2xy e^{-xy^2} = 0$$

on a la solution évidente $x = y = 0$. Sinon, les équations entraînent $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et donc:

$$\exp(xy^2 - x^2y) = -\frac{y^2}{2xy} = -\frac{2xy}{x^2}$$

qui entraînent: $x^2y^2 = 4x^2y^2$ soit $x^2y^2 = 0$, c'est à dire $x = 0$ ou $y = 0$, ce qui est contradictoire.

La seule solution est donc:

$$\mathbf{x = y = 0}$$

qui est un point singulier de la surface mais n'est pas un extremum.