II.

L'espace-temps de la relativité restreinte.

L'invariance de la vitesse de la lumière, donnée d'expérience, conduit à établir les formules de transformation de Lorentz entre les coordonnées d'espace et de temps de référentiels en mouvement de translation uniforme les uns par rapport aux autres. Ainsi l'espace et le temps apparaissent indissociables et le temps, dépendant du référentiel galiléen dans lequel on le mesure, perd son caractère absolu. Les phénomènes physiques doivent donc être étudiés dans un espace-temps à 4 dimensions dont il importe alors de connaître les propriétés géométriques et d'invariance qui peuvent également servir de point de départ à la théorie.

4. Lignes d'univers, invariance.

Un objet ponctuel parcourt une *ligne d'univers* dans l'espace temps à 4 dimensions. La flèche du temps est orientée du passé vers l'avenir. τ (mesuré en unités de longueur) est toujours croissant le long d'une ligne d'univers qui ne peut revenir en arrière ni effectuer de boucle.

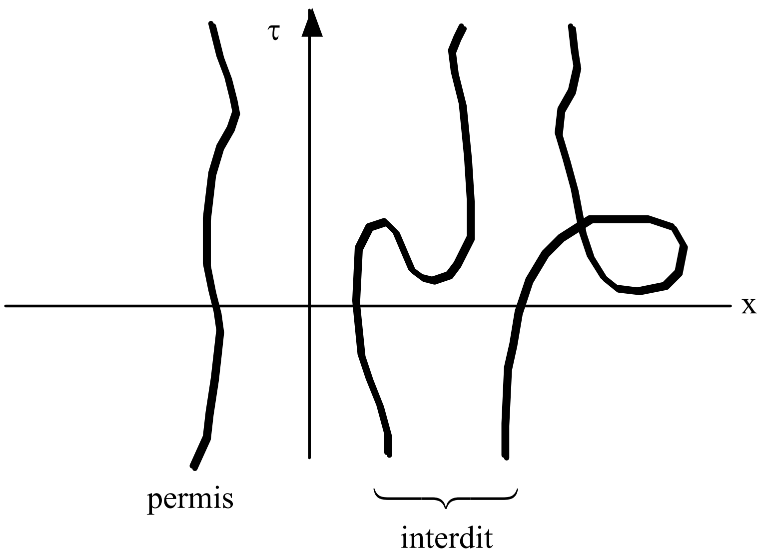


Figure II-1. *Lignes d'univers*

Un objet en mouvement dans l'espace physique à 3 dimensions est animé d'une vitesse instantanée de grandeur

$$\frac{ds}{d\tau} \qquad \text{avec} \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \; .$$

Il existe en mécanique deux *principes démocratiques* d'invariance:

- la forme des équations reste inchangée par changement de position du référentiel spatial;

- elle est aussi inchangée par changement de référentiel en mouvement uniforme.

Ces deux principes étant respectés, la flèche du temps peut-elle à partir d'un point d'espace-temps, être pointée dans toutes les directions du demi espace $\tau > 0$?

La réponse est positive dans le cadre de la mécanique newtonnienne. Elle est négative si l'on étend les principes aux lois de l'électromagnétisme (équations de Maxwell). Alors la transformation linéaire entre coordonnées d'espace et de temps dans un changement de référentiel en mouvement uniforme doit impliquer a priori l'*invariance de la vitesse c de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.*

Un raisonnement sur un exemple simple montre que cette invariance entraîne celle d'un certain intervalle d'espace-temps. Soit en effet un mobile qui se déplace dans la direction Ox à partir d'une origine O avec une vitesse constante par rapport au référentiel R_0. Au départ en O, il émet une impulsion lumineuse de vitesse prise pour unité, réfléchie par un miroir M situé dans la direction Oy à une distance D, et qui rencontre à nouveau l'axe des x en un point P_0 d'abscisse positive Δx_0 dans R_0.

Imaginons 2 cas de déplacement d'un mobile constitué d'une fusée qui porte l'émetteur de lumière et le long de laquelle peut se déplacer un détecteur. La vitesse de la fusée n° 1 est telle que dans le référentiel R_1 où elle est immobile, émetteur et détecteur sont situés au même point O_1. La vitesse de la fusée n° 2 est encore plus grande de sorte que dans le référentiel R_2 où elle est immobile, il faut placer le détecteur en P_2 à une abscisse négative Δx_2 (figure II-2).

Evaluons le temps $\Delta\tau$ mis par la lumière pour aller de l'émetteur au détecteur dans chacun des 3 référentiels:

- $R_0 : \Delta\tau_0 = 2\sqrt{D^2 + \left(\frac{\Delta x_0}{2}\right)^2}$ soit $\Delta\tau_0^2 = 4D^2 + \Delta x_0^2$,
- $R_1 : \Delta\tau_1 = 2D$ soit $\Delta\tau_1^2 = 4D^2$,
- $R_2 : \Delta\tau_2 = 2\sqrt{D^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{2}\right)^2}$ soit $\Delta\tau_2^2 = 4D^2 + \Delta x_2^2$.

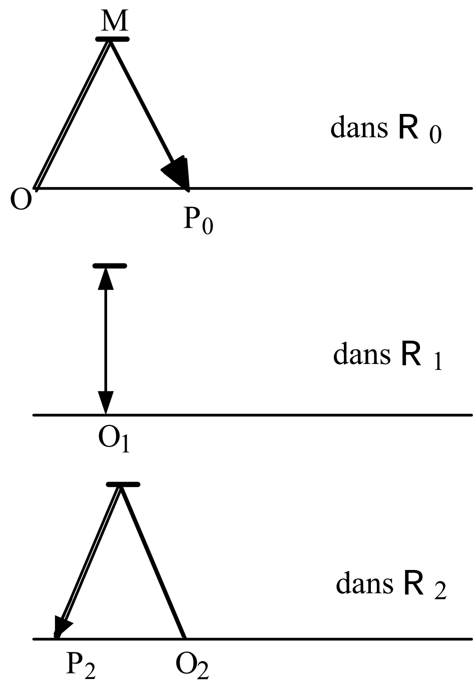


Figure II-2.

Il est clair que dans tous les référentiels l'identité suivante est vérifiée

$$\Delta\tau^2 - \Delta x^2 = 4D^2 .$$

On conclut donc à l'invariance de $\Delta\tau^2 - \Delta x^2$ par changement de référentiel.

La relation d'invariance se généralise en incluant les coordonnées passives y et z à l'intervalle d'espace-temps:

$$d\tau^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \text{cte.} \quad (5\text{-}1)$$

Cette invariance implique l'existence d'une vitesse limite pour tout objet matériel.

En effet l'axiome de Minkowski énonce: *Tout objet matériel en un point d'espace-temps (d'univers) peut toujours être considéré comme au repos moyennant une définition appropriée de l'espace et du temps.*

La constante est égale au carré de l'intervalle de temps dans le référentiel correspondant ce qui entraîne que la constante est alors positive. A vitesse $\dfrac{ds}{d\tau}$ constante, la relation

$$\tau^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \text{cte} > 0$$

généralise l'équation d'un hyperboloïde de révolution à 2 nappes. Si tous les mouvements s'effectuent suivant Ox, elle se réduit à

$$\tau^2 - x^2 = \tau_0^2$$

équation d'une hyperbole H dans le plan τ,x dont on ne retiendra que l'arc situé dans le demi plan $\tau > 0$. La vitesse d'un objet matériel par rapport au référentiel R d'espace-temps défini par les axes Ox,Oτ est donnée par le quotient x/τ (appelé ici pente) relatif à l'extrémité sur H d'un vecteur (*quadrivecteur*) dont l'origine est en O. Pour l'objet immobile cette extrémité se situe sur l'axe des temps au point d'ordonnée τ_0. Il est clair que la grandeur de la vitesse est toujours inférieure à 1, grandeur de la pente des asymptotes.

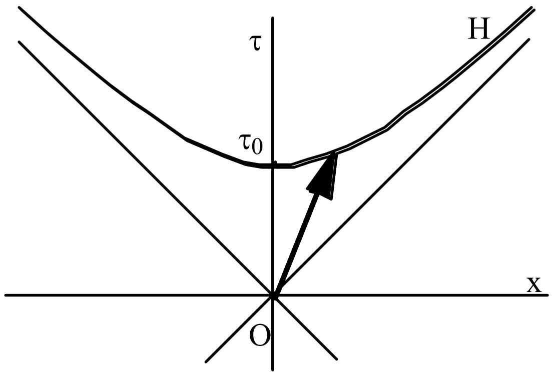


Figure II-3. *Quadrivecteur du genre temps.*

La ligne d'univers d'un objet matériel partant de O est toujours contenue à l'intérieur du cône généralisé dont l'intersection avec le plan Ox,Oτ est constituée par ces asymptotes. L'axe des temps est la ligne d'univers d'un objet immobile dans R. L'intervalle d'espace-temps correspondant à une constante positive est appelé *intervalle du genre temps*.

Le cône lui même correspond à un invariant nul: *intervalle du genre lumière*.

Un quadrivecteur dont l'extrémité est à l'extérieur du cône correspond à un invariant négatif: *intervalle du genre espace*. Il ne peut se confondre avec la ligne d'univers d'un objet matériel.

5. Simultanéité.

Considérons le cas très simple d'un référentiel R' qui se déplace, par rapport au référentiel R, d'un mouvement uniforme suivant Ox avec la vitesse **u**. Les directions Oy

(O'y') et Oz (O'z') n'ayant qu'un rôle passif, il suffit de représenter, dans chacun des référentiels, les abscisses Ox (O'x') en fonction des temps: τ (τ').

A l'instant 0, les origines des deux référentiels coïncident (*synchronisation des horloges*): deux signaux lumineux sont émis depuis l'origine commune, l'un vers les x positifs, l'autre vers les x négatifs. Dans R', ces signaux atteignent les points d'abscisses $-x'_0$ et x'_0 au même instant $\tau'_0=x'_0$. Au point P' ($-x'_0$, τ'_0) dans un diagramme x',ct', se situe un évènement: la réception d'un signal lumineux. Dans R, ce même évènement a lieu au point P situé à l'intersection des droites

$$x = - \tau \qquad \text{(invariance de c)} \qquad \text{et} \qquad x = = \beta\tau - x_0$$

où l'on a introduit la vitesse sans dimensions β. Les coordonnées de P sont donc

$$x_P = - \frac{x_0}{1+\beta}\,, \qquad \tau_P = \frac{x_0}{1+\beta}\,.$$

De la même façon, l'évènement qui dans R' a lieu en Q' a lieu dans R au point Q dont les coordonnées sont

$$x_Q = \frac{x_0}{1-\beta}\,, \qquad \tau_Q = \frac{x_0}{1-\beta}\,.$$

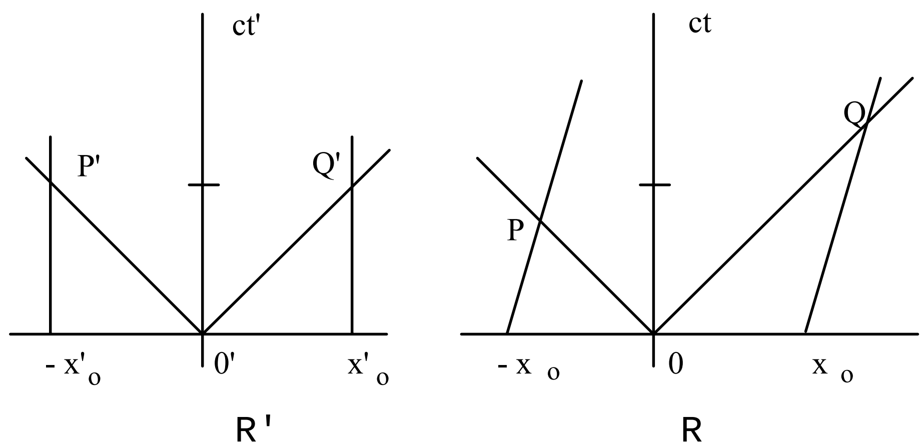


Figure II-4.

La réception des signaux qui était simultanée en P' et Q' dans R', ne l'est plus en P et Q dans R. Ainsi, l'invariance de c (résultat d'expérience) entraîne que *le temps n'est pas un absolu. La simultanéité ou son absence dépendent du référentiel galiléen dans lequel on mesure le temps*. Il convient donc d'affecter un temps différent à chaque référentiel galiléen. Ainsi dans R' on aura un temps τ' (différent de τ).

6. Structure de l'espace-temps, transformation de Lorentz

La relation d'invariance,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{cte},$$

satisfaite par toutes les rotations autour de l'origine, structure l'espace physique isotrope à 3 dimensions. Elle contient les formules usuelles de changement d'axe par rotation. Soit en effet à 2 dimensions

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = 1.$$

On passe des x aux x' par une transformation linéaire

$$\begin{aligned} x &= ax' + by', \\ y &= ex' + fy', \end{aligned} \qquad (6\text{-}1)$$

dont les coefficients doivent satisfaire la relation d'invariance ce qui entraîne

$$a^2 + e^2 = b^2 + f^2 = 1, \qquad \text{et} \qquad ab + fe = 0.$$

Le premier groupe de ces relations incite à poser :

$$a = \cos\theta,\ e = \sin\theta, \qquad b = \sin\varphi,\ f = \cos\varphi\ ;$$

portant dans la dernière, il vient

$$\cos\theta \sin\varphi + \sin\theta \cos\varphi = \sin(\varphi + \theta) = 0\ .$$

Alors

$$\begin{aligned} a &= f = \cos\theta \\ b &= -e = -\sin\theta\ . \end{aligned}$$

On retrouve ainsi les formules habituelles de changement d'axe par rotation d'un angle θ autour de l'origine, conséquences ici de la seule invariance.

De la même façon, la relation d'invariance

$$\tau^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \text{cte}$$

structure l'espace-temps. Laissant de côté les coordonnées passives y et z (y = y', z = z'), les coefficients de la transformation linéaire entre coordonnées d'espace-temps des référentiels R et R' soit

$$x = ax' + b\tau', \qquad (6\text{-}2)$$
$$\tau = ex' + f\tau',$$

et respectant l'invariance

$$\tau^2 - x^2 = 1,$$

vérifient les relations

$$a^2 - e^2 = f^2 - b^2 = 1, \qquad \text{et} \qquad ab = ef,$$

qui entrainent

$$a = f, \quad b = e.$$

La transformation inverse

$$x' = \frac{a}{a^2 - b^2}\,x - \frac{b}{a^2 - b^2}\,\tau\,,$$
$$\tau' = -\frac{b}{a^2 - b^2}\,x + \frac{a}{a^2 - b^2}\,\tau\,.$$

doit en verttu de la démocratie être de même forme que (6-2) aux changements de signe près entraînés par le changement de sens de la vitesse (renversement du temps). Alors les dénominateurs doivent être égaux à 1. Prenant

$$a = \mathrm{ch}\psi$$
$$b = \mathrm{sh}\psi\,,$$

invariance et démocratie sont maintenant satisfaites. Alors, posant

$$\beta = \mathrm{th}\psi < 1,$$

il vient

$$a = \mathrm{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{th}^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma\,,$$
$$b = \mathrm{sh}\psi = \frac{\mathrm{th}\psi}{\sqrt{1 - \mathrm{th}^2\psi}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \beta\gamma\,.$$

La transformation linéaire (6-2) s'écrit ainsi

$$x = \gamma\left(x' + \beta\tau'\right),$$
$$\tau = \gamma\left(\beta x' + \tau'\right).$$

L'origine du référentiel R' est en x' = 0. Il est clair que β (= x/τ) est la vitesse de translation de R' par rapport à R. On a obtenu la *transformation de Lorentz* dans un système d'unités où la vitesse de la lumière dans le vide c est prise comme unité. On passe au système S.I. en prenant

$$\tau = ct, \qquad \text{avec} \qquad c = 299\,792\,458 \text{ m/s}.$$

et la transformation de Lorentz se met sous sa forme habituelle

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma\left(x' + \beta ct'\right), \\ ct &= \gamma\left(\beta x' + ct'\right), \end{aligned} \qquad (6\text{-}3)}$$

avec pour inverse

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma\left(x - \beta ct\right), \\ ct' &= \gamma\left(-\beta x + ct\right). \end{aligned} \qquad (6\text{-}4)}$$

7. Quadrivecteurs contravariants et covariants.

Désignant par X la projection d'un quadrivecteur dans l'espace physique on note (ct, X) les quadrivecteurs obéissant à la transformation de Lorentz sous la forme (6-3) (6-4) lorsque le déplacement s'effectue suivant Ox. Les composantes de ces quadrivecteurs appelés *contravariants* sont notées x^μ où μ prend les valeurs 0,1,2 et 3, avec:

$$x^0 = ct, x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z.$$

On associe à un tel quadrivecteur contravariant un quadrivecteur *covariant* de composantes notées x_μ, avec

$$x_0 = ct, x_1 = -x, \qquad x_2 = -y, \qquad x_3 = -z,$$

de sorte que la relation d'invariance prend la forme

$$x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3 = x^\mu\, x_\mu = \text{cte}$$

où dans l'expression $x^\mu\, x_\mu$ on fait la convention de *somme sur les indices répétés* (Einstein). Ainsi

$$x^\mu\, x_\mu = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2t^2 - X^2\,.$$

Pour savoir comment se transforment les quadrivecteurs covariants lors des changements de référentiel galiléens, on écrit pour une seule dimension spatiale

$$x'_1 = a\,x_1 + b\,\tau_0\,,$$

$$\tau'_0 = e\,x_1 + f\,\tau_0\,.$$

Substituant dans la relation d'invariance et faisant usage de (6-3)(6-4) pour les x^μ, on trouve entre les coefficients:

$$b = \beta e, d = \beta a,$$

$$\gamma a(1\text{-}\beta^2) = 1, \qquad \gamma e(1\text{-}\beta^2) = 1$$

de sorte que

$$a = e = \gamma, \qquad b = d = -\,\beta\gamma.$$

Finalement, la transformation pour les quadrivecteurs covariants s'écrit

$$x'_1 = \gamma\left(x_1 + \beta\tau_0\right),$$
$$\tau'_0 = \gamma\left(\beta x_1 + \tau_0\right),$$

et inversement

$$x_1 = \gamma\left(x'_1 - \beta\tau'_0\right),$$
$$\tau_0 = \gamma\left(-\,\beta x'_1 + \tau'_0\right).$$

Ainsi la transformation est différente par les signes de celle des quadrivecteurs contravariants. Mais elle est identique à celle que l'on obtient pour les opérateurs différentiels (C.F chapitre VII).

8. Représentation de l'espace-temps, causalité.

Faute de pouvoir visualiser un espace à 4 dimensions, on doit se contenter le plus souvent de 2 ou 3 dimensions. Mais on gardera le terme quadrivecteur à cause de l'invariance qui lui est associée.

L'équation r=ct est celle d'un cône dont l'axe est l'axe des temps. Les quadrivecteurs ayant leur origine au sommet et leur extrémité à l'intérieur du cône sont du genre temps. Le cône lui même est le **CONE DE LUMIERE**. Chaque point de l'espace-temps est le sommet d'un cône de lumière. La figure suivante montre un espace-temps à trois dimensions dont deux d'espace

Soit à un instant choisi comme origine des temps, un objet matériel ponctuel en un point de l'espace-temps. Choisissons ce point comme origine du référentiel d'espace-temps R. Si l'objet est au repos dans R, il se déplacera le long de l'axe des temps. S'il est en mouvement, nécessairement à une vitesse u inférieure à c, le déplacement aura lieu à l'intérieur du cône de lumière ayant l'origine pour sommet. La surface du cône est réservée à la représentation de la propagation des signaux lumineux émis par l'objet occupant sa position initiale. Déplacement et propagation des signaux lumineux s'effectuent dans le sens des t croissants. L'intérieur du cône de lumière du côté des ct positifs représente donc l'**AVENIR** par rapport à l'origine: **ICI et MAINTENANT**. Cette position initiale est elle même le résultat d'un état de repos ou de mouvement qui ont eu lieu aussi à l'intérieur du cône de lumière mais du côté des ct négatifs: cette région de l'espace-temps représente donc le **PASSE**. Quant à l'extérieur du cône, il n'est pas accessible par un mouvement ou la propagation d'un signal lumineux à partir de la position initiale, ni ne peut être à l'origine d'un mouvement ou de la propagation d'un signal lumineux y aboutissant: c'est **AILLEURS**.

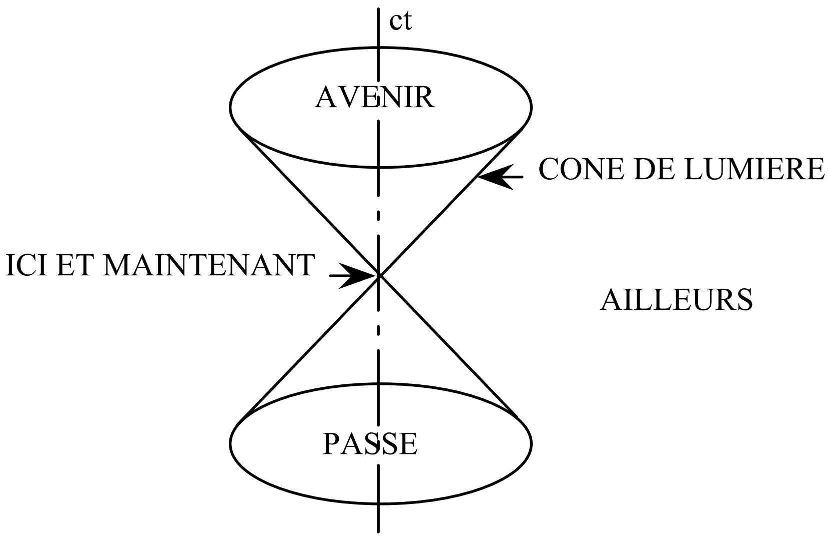


Figure II-5.

Admettons que tous les mouvements s'effectuent suivant l'axe des x: la section du cône par le plan méridien contenant Ox, fournit une représentation à deux dimensions que nous utiliserons abondamment dans la suite:

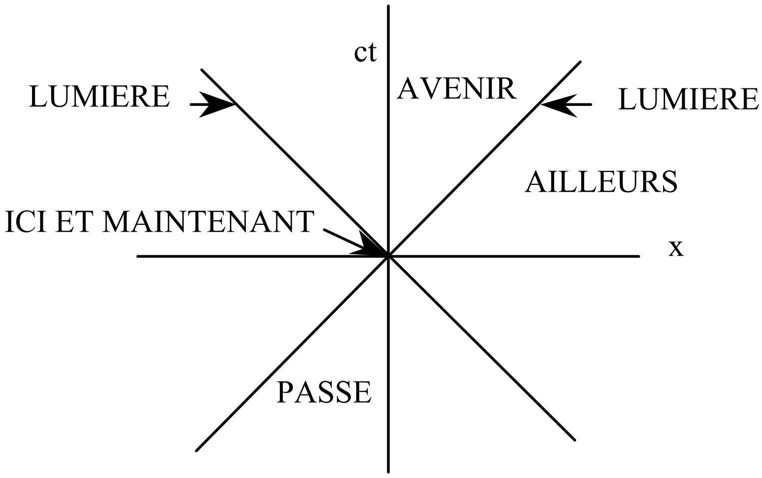


Figure II-6.

Un cône de lumière donc un passé, un avenir et un ailleurs sont attachés à chaque point de l'espace-temps. La causalité comme la communication entre deux observateurs ne s'exercent qu'à l'intérieur d'un cône de lumière.

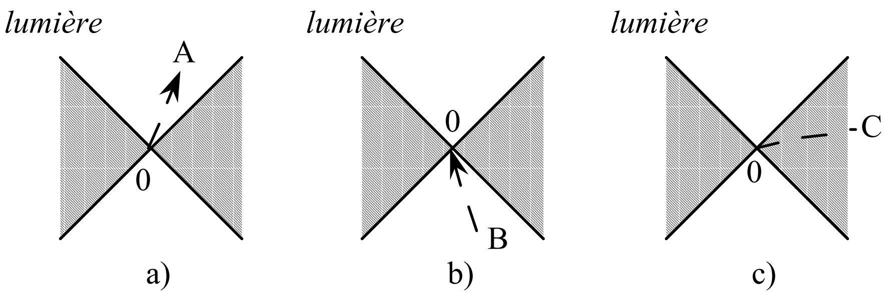


Figure II-7.
a) O envoie de l'information vers A; b) O reçoit de l'information depuis B; c) O et C ne communiquent pas.

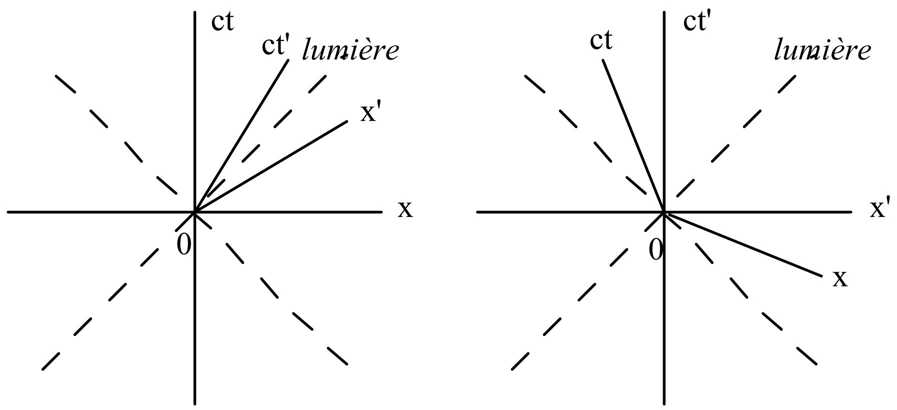
Revenons à la transformation de Lorentz entre les coordonnées dans deux référentiels d'espace-temps R et R' , le second ayant par rapport au premier un mouvement de translation uniforme à la vitesse u suivant Ox.

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$
$$ct' = \gamma(-\beta x + ct).$$

Les points tels que x'=0, sont représentés par la droite :

$$x = \beta ct = ut$$

tracé usuel dans le plan x,t d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse u. Puisqu'on doit avoir u<c, ce tracé n'est permis qu'à l'intérieur du cône de lumière.



a) *b)*

Figure II-8.

Les points tels que t'=0 sont eux représentés par la droite:

$$x = \frac{c\,t}{\beta}$$

symétrique de la précédente dans le plan x,ct par rapport à la première bissectrice et donc extérieure au cône de lumière. Dans ce diagramme (dit de Minkowski), les axes de coordonnées du référentiel d'espace-temps R' en mouvement de translation uniforme par rapport à R avec la vitesse u suivant Ox sont les deux axes obliques Ox', Oct'. Inversement R est en mouvement par rapport à R' avec la vitesse -u selon le schéma de la figure II-8, b.

10. Contraction de Fitzgerald-Lorentz.

Soient deux points A_1 et A_2 d'un espace-temps à deux dimensions. Leurs abscisses dans R' sont calculées à partir des coordonnées dans R au moyen de la transformation de Lorentz :

$$x'_2 = \gamma\,(x_2 - \beta c t_2)$$

$$x'_1 = \gamma\,(x_1 - \beta c t_1).$$

Supposons $t_2 = t_1$: A_1 et A_2 correspondent à des évènements simultanés dans R. On trouve alors

$$x_1 - x_2 = \frac{x'_1 - x'_2}{\gamma}$$

ce qui montre que la distance (différence des abscisses) entre A_1 et A_2 est plus courte dans R que dans R′ par un facteur $\frac{1}{\gamma}$. Supposons que les abscisses x'_1 et x'_2 soient constantes dans R′. Si A_1 et A_2 correspondent à une succession d'évènements simultanés (t variable) dans R, le quadrivecteur $A_1(t)A_2(t)$ est du genre espace et ses extrémités se déplacent dans R avec la vitesse u:

$$x_2 = ut + \frac{x'_2}{\gamma}$$

$$x_1 = ut + \frac{x'_1}{\gamma}.$$

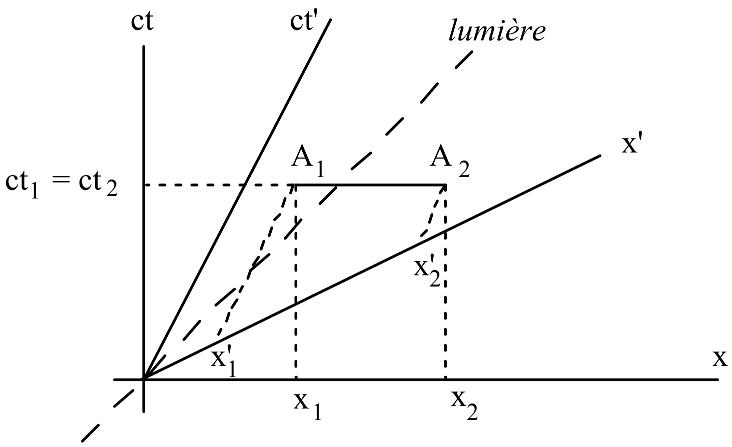


Figure II-9.

Les équations précédentes décrivent aussi le mouvement d'un objet rigide (règle) qui glisse parallèlement à lui même le long de l'axe des x. $|x'_2 - x'_1|$ représente la longueur L' (différence des abscisses des extrémités) de cet objet dans le référentiel d'espace-temps R′. Dans R la longueur L' est divisée par γ à condition que les deux extrémités soient observées simultanément.

Une façon d'y parvenir est de disposer en A_1 et A_2 des miroirs qui réfléchissent simultanément des signaux lumineux émis à l'instant t_e, puis reçus non moins simultanément à t_r par un observateur Ω immobile dans R et qui ne peut faire cette mesure qu'une seule fois (figure II-10).

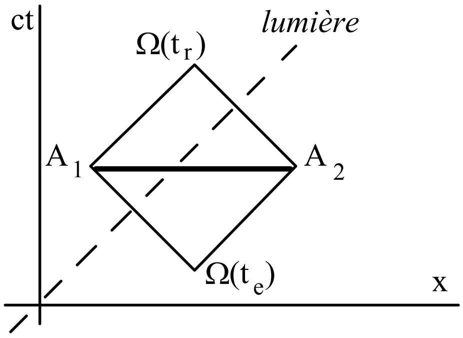


Figure II-10.

La contraction des longueurs, dite de Fitzgerald-Lorentz, fut introduite à l'origine (1892) comme une hypothèse "ad-hoc" pour expliquer le résultat négatif de l'expérience de Michelson et Morley (C.F. § 22). La longueur L dans R tend vers zéro lorsque u se rapproche de c par valeurs inférieures. On retrouve ici le rôle de limite que joue la vitesse de la lumière dans le vide.

10. Temps propre et privatisation du temps.

La ligne d'univers, succession des positions d'un objet dans l'espace temps, est une ligne droite en l'absence d'accélération, une ligne brisée ou courbe dans le cas contraire:

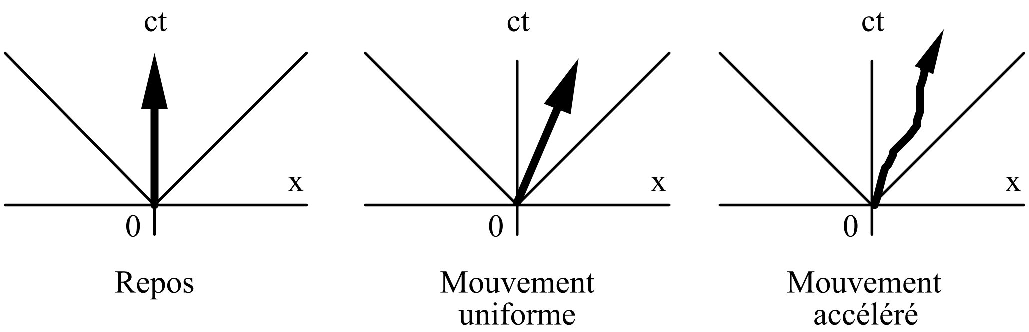


Figure II-11.

Considérons le déplacement élémentaire d'un objet matériel le long de sa ligne d'univers. Il correspond à ce déplacement, un quadrivecteur qui pointe vers l'avenir à l'intérieur du cône de lumière de son origine. Ce quadrivecteur est donc du genre temps. Sa norme invariante est

$$c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2dt_0{}^2.$$

L'intervalle de temps élémentaire dt_0 est mesuré dans le référentiel R_0 où l'objet est au repos. Plus précisément, R_0 est le référentiel d'inertie tangent, à l'origine du quadrivecteur, au mouvement réel. On appelle dt_0 l'intervalle élémentaire de *temps* *propre*. L'origine et l'extrémité du quadrivecteur représentent aussi bien deux événements ayant lieu au même endroit dans R_0.

Dans le référentiel R par rapport auquel R_0 est en mouvement de translation uniforme, $dx^2+dy^2+dz^2$ est strictement positif: dt_0 est inférieur à dt (appelé souvent intervalle de temps impropre). On a

$$dt_0 < dt \qquad \text{pour tout } R \text{ en mouvement par rapport à } R_0.$$

Pour préciser ce point, considérons un mouvement rectiligne et uniforme le long de l'axe des x à la vitesse u. Alors d'après l'invariance de la norme et utilisant la transformation de Lorentz:

$$(dt_0)^2 = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(dt)^2, \qquad \text{ce qui entraîne} \qquad \Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma}.$$

C'est l'effet de *ralentissement des horloges* qui a fait couler beaucoup d'encre.

L'intervalle de temps propre est associé à un arc élémentaire d'une ligne d'univers. Non seulement le temps n'est plus un absolu, mais il existe autant de temps propres que d'objets matériels se déplaçant dans l'espace temps. Ainsi, les lois de la relativité impliquent la **privatisation du temps**.

Dans l'espace-temps, deux lignes d'univers peuvent se rencontrer en plusieurs points. Il n'y a aucune raison en général pour que les intervalles de temps propre entre deux points de rencontre soient les mêmes le long de lignes d'univers différentes (telle est l'origine du célèbre paradoxe des jumeaux).

Une horloge est un dispositif de comptage de périodes sur un phénomène répétitif: mécanique (oscillations d'un diapason ou d'un pendule), électrique (oscillations d'un quartz), atomique (émission lumineuse) ou encore biologique (circulation du sang). Un intervalle de temps propre est mesuré en comptant un certain nombre de périodes dans le référentiel où l'horloge est au repos. Dans un référentiel où l'horloge est en mouvement, ce même nombre de périodes définit un intervalle de temps dont la transformation de Lorentz nous apprend qu'il est plus long par un facteur γ que l'intervalle de temps propre.

11. Un exemple de dilatation du temps

La dilatation du temps par changement de référentiel est un phénomène bien établi expérimentalement depuis 1941 (B. Rossi & D.B. Hall,*Phys. Rev.* **59**-1941-223), à partir de la mesure, au laboratoire et dans le rayonnement cosmique, des temps de décroissance de particules transitoires, les muons (μ). Ces particules (électrons lourds) se désintègrent en un électron de même charge que le muon, un neutrino mésique et un anti neutrino:

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu_0 + \overline{\nu}_0 \, .$$

Lorsque les mesures sont effectuées au laboratoire où les μ ont une vitesse négligeable devant c, on note que la moitié de la population initiale a disparu au bout d'un temps $\tau_0 = 2.20\ 10^{-6}$ s. appelé *demi-vie*.

Les muons du rayonnement cosmique résultent de l'intéraction de protons de haute énergie avec l'atmosphère terrestre. Ils sont créés à une soixantaine de kilomètre d'altitude et ont une vitesse proche de celle de la lumière. A cette vitesse, la demi-vie permet de parcourir une distance de

$$2.20\ 10^{-6} \cdot 3\ 10^{8} = 660 \text{ m}$$

soit environ le centième de l'altitude de création des μ. Au sol, il ne devrait rester qu'une fraction $\frac{1}{2^{100}}$, parfaitement négligeable de la population initiale. Dans la réalité, le rapport, déduit de mesures effectuées vers 60 km d'altitude et au sol, est de $\frac{1}{8}$ soit $\frac{1}{2^3}$. Dans un référentiel lié à la terre la demi-vie est ainsi

$$\tau_T = \frac{h}{3c} - \frac{1}{3}\frac{6\ 10^4}{3\ 10^8} = 6.6\ \ 10^{-5} \text{ S.} = 30\ \ \tau_0 \, .$$

On en déduit le rapport de la vitesse des muons cosmiques à la vitesse de la lumière

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau_T}\right)^2} = 0.9994 \, .$$

On fait au laboratoire le même type d'expériences sur des mésons π (appelés aussi pions) produits lors d'impacts de faisceaux de protons de haute énergie sur des cibles. La demi-vie des pions est de $1.8\ 10^{-8}$ s. permettant d'effectuer des mesures significatives sur quelques dizaines de mètres seulement (R.P. Durbin, H.H. Loar and W.W. Havens, *Phys. Rev.* **88**-1952-179). Ces particules étant créées avec une vitesse proche de c, il en disparaîtrait la moitié au bout de 5.4 m. sans l'effet de dilatation du temps. On contraire, on constate que les faisceaux de pions très énergiques peuvent se propager sans beaucoup de pertes sur des distances assez grandes (circonstance heureuse pour les physiciens des hautes énergies!). Ainsi au laboratoire Fermi près de

Chicago, le facteur de Lorentz γ des pions étant d'environ 200, la distance au bout de laquelle la moitié d'entre eux disparaît est portée à près de 11 km.