

## VI

**Exemples de physique relativiste : lumière et particules.****29. Le photon: son énergie, son impulsion et sa masse.**

Une réflexion sur le spectre d'émission du corps noir avait conduit Planck (1900) à postuler que les échanges d'énergie par rayonnement électromagnétique ne peuvent se faire que par quantités discrètes : toute énergie échangée à la fréquence  $\nu$  est multiple entier de  $h\nu$  où  $h$  est une constante universelle égale à  $6.6262 \cdot 10^{-34}$  J.s. en unités S.I. A partir de là, on passe facilement à l'idée d'une lumière constituée de "grains" appelés photons ayant cette énergie:

$$h\nu = \hbar \omega \quad \text{avec} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.0546 \cdot 10^{-34} \text{ J.s.}$$

Dans un changement de référentiel, l'énergie est calculée à partir de la transformation de Lorentz :

$$E' = \gamma (-\beta pc + E).$$

Prenant :

$$E' = \hbar \omega', \quad E = \hbar \omega$$

il vient:

$$\hbar \omega' = \hbar \omega \gamma (1 - \beta) = -\gamma \beta pc + \gamma \hbar \omega,$$

ce qui donne pour l'impulsion (quantité de mouvement) du photon

$$p = \frac{\hbar \omega}{c} = \hbar k.$$

On retrouve bien l'invariant du quadrivecteur fréquence vecteur d'onde (C.F. § 18):

$$E^2 - p^2 c^2 = \hbar^2 \omega^2 - \hbar^2 k^2 c^2 = 0.$$

On en conclut que le photon ne peut pas avoir de "masse au repos". En effet, pour une particule matérielle (massive), on avait obtenu (C.F. chapitre V):

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m^2 c^2 (c^2 - v^2) = m_0^2 c^4,$$

relation qui impose une vitesse de déplacement inférieure à  $c$ . Seuls des objets sans masse, comme les photons, peuvent se propager à la vitesse  $c$  de la lumière dans le vide.

### 30. Ensembles d'objets : référentiel du centre d'inertie

En mécanique non relativiste, on utilise le centre de masse d'un ensemble d'objets matériels en mouvement. Cette notion perd de son intérêt en mécanique relativiste à cause de la variation de la masse en fonction de la vitesse. Tout objet matériel ou non, possède énergie et quantité de mouvement. Deux grandeurs sont associées à un ensemble de particules et de photons: une quantité de mouvement (impulsion) globale, somme géométrique des impulsions individuelles:

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i,$$

et une énergie totale:

$$E = \sum_i E_i.$$

Ces grandeurs sont définies dans un référentiel  $R$  donné. Dans un autre référentiel les mêmes grandeurs seront reliées aux précédentes par la transformation de Lorentz (linéaire) pour le quadrivecteur impulsion-énergie. Supposons  $\mathbf{P}$  dirigée suivant  $Ox$ . Dans  $R'$ , animé par rapport à  $R$ , de la vitesse  $u$  suivant  $Ox$ :

$$\begin{aligned} P'c &= \gamma_u (Pc - \beta_u E) \\ E' &= \gamma_u (-\beta_u Pc + E). \end{aligned}$$

On peut donc toujours trouver un référentiel où l'impulsion résultante est nulle: **référentiel du centre d'inertie**. Soit donc  $P'_0=0$  dans  $R'_0$ . Alors:

$$E = Pc/\beta_u$$

ce qui entraîne

$$E = \gamma_u E_0' \quad \text{et} \quad Pc = \gamma_u \beta_u E_0'.$$

La norme invariante du quadrivecteur impulsion-énergie d'un ensemble d'objets en mouvement est:

$$E^2 - P^2c^2 = E_0'^2.$$

égale donc à l'opposé du carré de l'énergie totale dans le référentiel  $R_0'$  où  $P'_0=0$ .

On obtient en général la vitesse  $\mathbf{u}$  par rapport à  $R$ , du référentiel  $R_0'$  du centre d'inertie, au moyen de la relation:

$$\frac{\mathbf{u}}{c} = \beta_u = \frac{\mathbf{P}c}{E}.$$

Pour des objets matériels massifs,

$$\frac{\mathbf{u}}{c} = \beta_u = \frac{\mathbf{P}c}{E} = \frac{\sum_i m_i \beta_i c^2}{\sum_i m_i c^2} = \frac{\sum_i m_{0i} \gamma_i \beta_i}{\sum_i m_{0i} \gamma_i}.$$

Dans le cas d'objets identiques, (même masse au repos  $m_0$ ):

$$\frac{\mathbf{u}}{c} = \beta_u = \frac{\sum_i \gamma_i \beta_i}{\sum_i \gamma_i}.$$

En l'absence de toute force extérieure à l'ensemble des objets en mouvement, le référentiel de centre d'inertie a un mouvement de translation uniforme par rapport à tout autre référentiel.

### 31. Lois de conservation pour une collision.

Soit un état initial d'un système isolé de toute influence extérieure. Chacun des partenaires a une impulsion et une énergie bien définies dans  $R$ . Une collision conduit à un état final où les impulsions et les énergies sont différentes de celles de l'état initial. Le calcul complet de ce qui se passe au cours de la collision, nécessite la connaissance de la loi de force entre les protagonistes. Mais il est en général possible de relier en partie l'état final à l'état initial sans connaître précisément la loi de force.

On utilise pour cela des lois de conservation: des grandeurs ont la même valeur avant et après la collision. Il en est évidemment ainsi de la norme du quadrivecteur impulsion totale - énergie totale. L'invariance de celle-ci fournit donc une première loi de conservation. Dans le référentiel  $R_0'$  du centre d'inertie, cette norme invariante se réduit à l'énergie totale. Dans ce référentiel, l'impulsion est nulle et l'énergie totale est conservée. Une transformation de Lorentz permet de calculer impulsion totale et énergie totale dans un autre référentiel  $R$ . La transformation est linéaire avec des coefficients qui ne dépendent que de la vitesse relative entre les deux référentiels, la même avant et après la collision pour un système isolé. Les valeurs trouvées pour l'impulsion totale et l'énergie totale dans  $R$  sont donc séparément conservées.

On se servira de la conservation de l'impulsion et de l'énergie en écrivant les relations correspondantes dans le référentiel où elles sont les plus simples. Le référentiel du centre d'inertie est souvent un choix judicieux.

Dans la suite nous nous limiterons aux collisions binaires. Toutes les vitesses sont alors dans un même plan (impulsion nulle et qui le reste dans la direction orthogonale à celui-ci). Etant donné un état initial, on doit rechercher 4 composantes de vitesse et deux masses dans l'état final. Les lois de conservation fournissent 3 équations: deux pour les composantes de l'impulsion, une pour l'énergie. Il subsiste donc toujours une indétermination qui ne sera que partiellement levée.

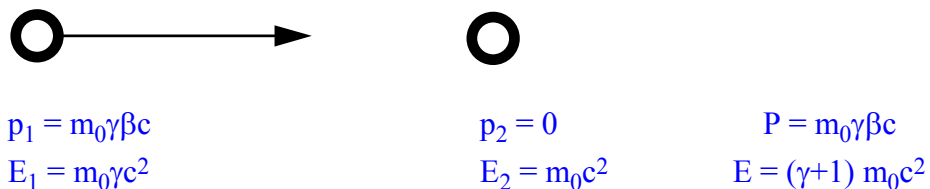
Lorsque le processus est **élastique**, on retrouve à la sortie de la collision les mêmes protagonistes qu'à l'entrée mais leurs vitesses ont changé de directions. Seules sont à déterminer les 4 composantes des vitesses: les trois équations ne suffisent évidemment pas mais l'indétermination ne porte plus que sur un seul paramètre: le plus souvent on choisit un angle.

Toute autre collision est dite **inélastique**.

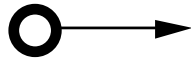
### 32. Cibles et projectiles.

Le cas simple de deux particules matérielles identiques auxquelles on fait subir une collision frontale, est d'une grande importance pratique en physique des hautes énergies. La collision peut être décrite soit dans un référentiel  $R$  où l'un des objets est au repos (interaction projectile cible) soit dans un référentiel  $R'$  (en l'occurrence celui  $R'_0$  du centre d'inertie) où les deux objets ont des impulsions opposées.

Dans  $R$ , on a le schéma:

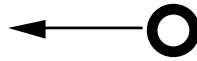


tandis que dans  $R'_0$ :



$$p'_1 = m_0 \gamma' \beta' c$$

$$E'_1 = m_0 \gamma' c^2$$



$$p'_2 = -m_0 \gamma' \beta' c$$

$$E'_2 = m_0 \gamma' c^2$$

$$P' = 0$$

$$E' = 2m_0 \gamma' c^2$$

On écrit l'invariance de la norme du quadrivecteur impulsion totale - énergie totale pour l'ensemble des deux objets:

$$-m_0^2 \gamma^2 \beta^2 c^4 + m_0^2 \gamma^2 c^4 + m_0^2 c^4 + 2m_0^2 \gamma c^4 = 4m_0^2 \gamma'^2 c^4$$

$$-\gamma^2 \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma + 1 = 4\gamma'^2$$

$$2(\gamma + 1) = 4\gamma'^2 .$$

Cette dernière relation, résolue pour  $\gamma$ , soit

$$(32-1) \quad \gamma = 2\gamma'^2 - 1,$$

permet de comprendre l'intérêt des collisionneurs par rapport aux accélérateurs envoyant des particules sur des cibles. Dans un collisionneur on lance les unes contre les autres des particules identiques. Lorsqu'on fournit à chaque particule une énergie

$$E_{\text{Coll}} = m_0 \gamma_C c^2$$

il faudrait, pour avoir la même énergie dans le référentiel du centre d'inertie, donner une énergie :

$$(32-2) \quad E_A = m_0 \gamma_A c^2 = (2\gamma_C^2 - 1)m_0 c^2$$

au projectile expédié sur une cible fixe. Le tableau VI-1 montre pour deux exemples représentatifs d'installations actuellement en service (Tevatron au Fermilab près de Chicago, LEP au CERN à Genève) le gain en énergie apporté par le principe des collisionneurs.

Tableau VI-1.

	Projectile	$m_0 c^2$ M.e.V.	$E_{\text{Coll}}$ M.e.V.	$\gamma_C$	$E_A$ M.e.V.
Tévatron	protons	938.2	$10^6$	$1.1 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^9$
L.E.P.	électrons	0.511	$5 \cdot 10^4$	$10^5$	$10^{10}$

### 33. Collision élastique entre deux objets matériels identiques.

Dans le référentiel  $R'_0$  du centre d'inertie, les deux objets sont toujours animés d'impulsions opposées. On peut définir un état précédant la collision et un état postérieur à celle-ci dans lesquels les mouvements sont rectilignes et uniformes. Dans les deux états, l'invariant relativiste se réduit à l'énergie totale conservée. On a donc :

$$2m_0\gamma'c^2|_{\text{avant}} = 2m_0\gamma'c^2|_{\text{après}} .$$

$\gamma'$  est conservé, les objets ont des impulsions de même module selon le schéma:

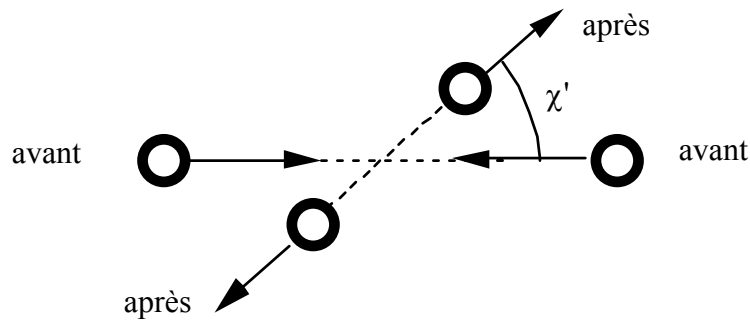


Figure VI-1. Collision dans  $R'_0$ .

L'angle  $\chi'$  est déterminé par les détails de la collisions dans lesquels nous n'allons pas entrer.

Revenons au référentiel  $R$  dans lequel l'un des objets est au repos avant la collision. En mécanique non relativiste, les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie d'une part, et de la masse d'autre part, imposent que les impulsions après la collision forment entre elles un angle de  $\frac{\pi}{2}$  :

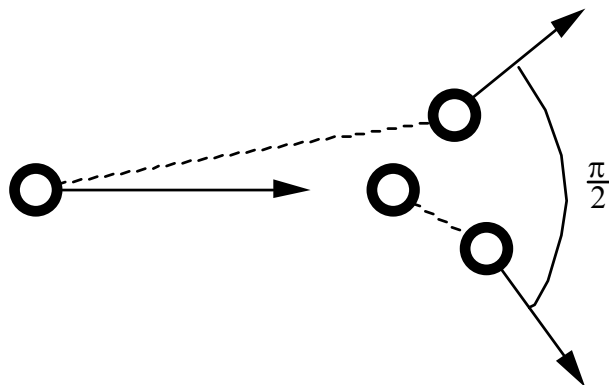


Figure VI-2. Collision non relativiste dans  $R$ .

En mécanique relativiste, la masse n'est pas conservée dans R. L'angle  $\theta$  entre les directions des impulsions après choc va être différent de  $\frac{\pi}{2}$ . Il est la somme de deux angles  $\chi_1$  et  $\chi_2$  qu'il est possible de calculer à partir de la loi de composition des vitesses.

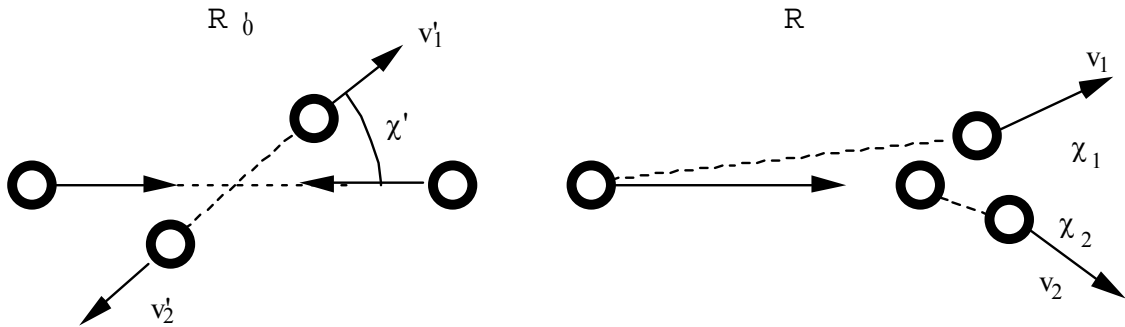


Figure VI-3.

On trouve pour les angles  $\chi_1$  et  $\chi_2$  que font dans R avec la direction incidente, les directions des objets après collision.

$$\operatorname{tg}\chi_1 = \frac{\sin\chi'}{\gamma_u(\cos\chi' + 1)}, \quad \operatorname{tg}\chi_2 = \frac{\sin\chi'}{\gamma_u(\cos\chi' - 1)},$$

où  $\chi'$  est dans  $R'_0$  l'angle entre les directions des objets avant et après collision.

L'angle  $\chi_1 - \chi_2$  est toujours inférieur à  $\pi/2$ <sup>1</sup>. Cet effet a été mis en évidence de façon spectaculaire au C.E.R.N. dans des expériences de collisions élastiques entre des protons (projectiles) et d'autres protons (cibles) appartenant au liquide d'une chambre à bulles.

### 34. Un exemple de collision inélastique.

Une réaction nucléaire de fusion transforme des noyaux légers (hydrogène et ses isotopes) en noyaux plus lourds (hélium). La réaction du deutérium (hydrogène lourd stable) sera peut être un jour d'une grande importance pratique (fusion thermonucléaire contrôlée). Elle nous intéresse ici car elle a servi à valider les lois de conservation dans les collisions, énoncées au § 32.

Elle concerne les noyaux suivants:

<sup>1</sup> Il est d'autant plus aigu que l'énergie du projectile est plus grande.

	<i>symboles</i>	<i>composition</i>	<i>masse (M.e.V.)</i>
proton	P ( $^1\text{H}$ )	1 proton	938.2796
neutron	N	1 neutron	939.5731
deutéron	D ( $^2\text{H}$ )	1 proton + 1 neutron	1876.092
triton	T ( $^3\text{H}$ )	1 proton + 2 neutrons	2809.384
hélium 3	$^3\text{He}$	2 protons + 1 neutron	2808.413

et présente deux branches également probables



Il convient d'abord de noter que la somme des masses au repos des noyaux produits dans l'une ou l'autre de ces deux réactions, est inférieure à la somme des masses au repos des noyaux qui réagissent. En vertu de l'équivalence entre masse et énergie, ces réactions où de la masse disparaît fournissent de l'énergie. C'est bien ce que montre l'expérience et c'est bien pourquoi on pense utiliser des réactions de fusion telles que celles-là dans une éventuelle source d'énergie de l'avenir.

La première réaction a été utilisée comme test des lois de conservation. Dans un montage faisceau cible, des deutérons d'énergie cinétique 1.808 M.e.V. rencontrent des deutérons immobiles, et on détecte le proton émis à  $90^\circ$  de la direction d'incidence.

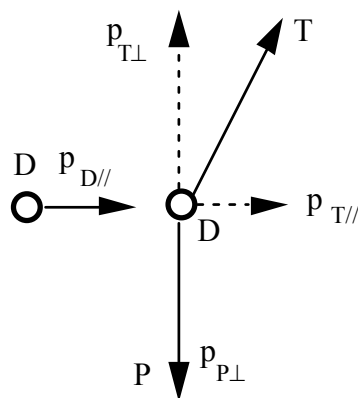


Figure VI-4.

On mesure l'énergie cinétique de ces protons trouvée égale à 3.467 M.e.V.

L'impulsion et l'énergie totales sont respectivement avant la collision:

$$p_{D//} \quad \text{et} \quad (\gamma_D + 1)m_{0D}c^2$$

et après la collision:

$$p_{T//}, p_{P\perp} + p_{T\perp} \quad \text{et} \quad \gamma_P m_{0P} c^2 + \gamma_T m_{0T} c^2 .$$

Les lois de conservation entraînent

$$\begin{aligned} p_{T//} &= p_{D//} \\ p_{T\perp} &= - p_{P\perp} \\ \gamma_T m_{0T} &= (\gamma_D + 1) m_{0D} - \gamma_P m_{0P} , \end{aligned}$$

tandis que pour le triton

$$(\gamma_T m_{0T} c^2)^2 = (p_{T//}^2 + p_{T\perp}^2) c^2 + (m_{0T} c^2)^2 .$$

Cet ensemble de relations fournit la masse du triton en fonction de grandeurs qui sont toutes connues:

$$(m_{0T})^2 c^4 = [(\gamma_D + 1) m_{0D} - \gamma_P m_{0P}]^2 c^4 - (p_{D//}^2 + p_{P\perp}^2) c^2 .$$

La valeur trouvée dans cette expérience est égale à  $2 \cdot 10^{-6}$  près à celle qui est mesurée directement par spectrométrie de masse.

### **35. Matérialisation, dématérialisation.**

En vertu des lois de conservation et de la célèbre relation d'équivalence entre la masse et l'énergie

$$E = mc^2 ,$$

chaque fois que du rayonnement est émis, l'émetteur doit subir une perte de masse. Inversement, l'absorption de rayonnement s'accompagne, pour l'absorbeur, d'une augmentation de masse. Ces variations de masse sont complètement négligeables dans le cas des réactions chimiques. Elles prennent toute leur importance dans le cas des réactions nucléaires et des processus entre particules élémentaires.

Une étoile comme le Soleil est un réacteur nucléaire au centre duquel se produisent des réactions de fusion entre noyaux légers. De l'hydrogène est ainsi transformé en hélium avec un abondant dégagement d'énergie. Celle-ci transite jusqu'à la surface de l'astre d'où elle s'échappe sous la forme d'un rayonnement de corps noir à la température de 5780 °K. La puissance totale rayonnée est de  $3.86 \cdot 10^{26}$  W ce qui correspond à une perte de masse de

$$\frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt} = 4 \cdot 10^9 \text{ Kg/s.} = 4 \cdot 10^6 \text{ tonnes par seconde.}$$

Les interactions des objets subatomiques (électrons et autres particules élémentaires) sont complexes. Les lois de conservation permettent cependant d'établir des règles de portée générale.

Ainsi par exemple, considérons un objet ponctuel de masse au repos  $m_0$ : son énergie cinétique et son impulsion varient en respectant l'invariance du quadrivecteur impulsion-énergie. Dans le diagramme  $E (=mc^2)$ ,  $pc$ , il est impossible de relier deux points différents A et B de l'hyperbole d'équation

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4,$$

par un segment de droite de pente 1 ce qui permettrait de passer d'un état à un autre par émission ou absorption d'un photon (figure VI-5a). La seule possibilité est une dématérialisation sous la forme de deux photons dont les impulsions vont en sens opposés (figure VIII-5b). Des particules stables comme l'électron ne peuvent disparaître ainsi. Mais on a rencontré au §2 des mésons instables, les pions neutres  $\pi^0$ , qui en effet se désintègrent en donnant naissance à deux photons.

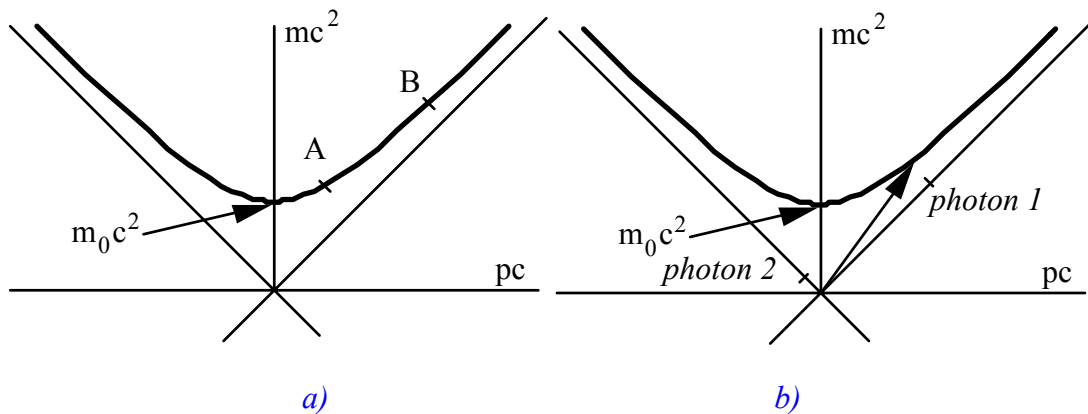


Figure VI-5.

Obéissant aux mêmes lois de conservation, les processus de matérialisation et de dématérialisation se calculent comme des collisions entre particules matérielles. Il est possible d'analyser un tel événement sur un diagramme impulsion-énergie lorsque toutes les quantités de mouvement sont parallèles à un même axe. On convient de compter négativement les énergies des particules qui disparaissent pendant la collision, positivement celles des photons produits. C'est une façon de tenir compte du sens

d'écoulement du temps, l'événement lui-même coïncidant avec l'origine des coordonnées.

Considérons deux exemples classiques de ces processus de matérialisation et de dématérialisation.

*Exemple 1: annihilation d'une paire électron-positron.*

Il existe des anti-électrons (positrons) de même masse que les électrons mais de charge opposée soit  $+e$  ( $e=1.6 \cdot 10^{-19}$  Coulomb). Quand un anti-électron rencontre un électron, la rencontre est fatale à ces deux particules. Aux énergies disponibles les plus basses, cette dématérialisation conjointe produit deux photons. Dans une collision frontale, les photons partent dans des directions opposées: la somme de leurs énergies est égale à l'énergie totale (masse au repos plus énergie cinétique) des particules, et l'impulsion totale est conservée.

On obtient ainsi, dans le diagramme impulsion énergie, le schéma de la figure VI-6 qui montre clairement que la production d'un seul photon ne satisfait pas à la fois la conservation de l'impulsion et celle de l'énergie.

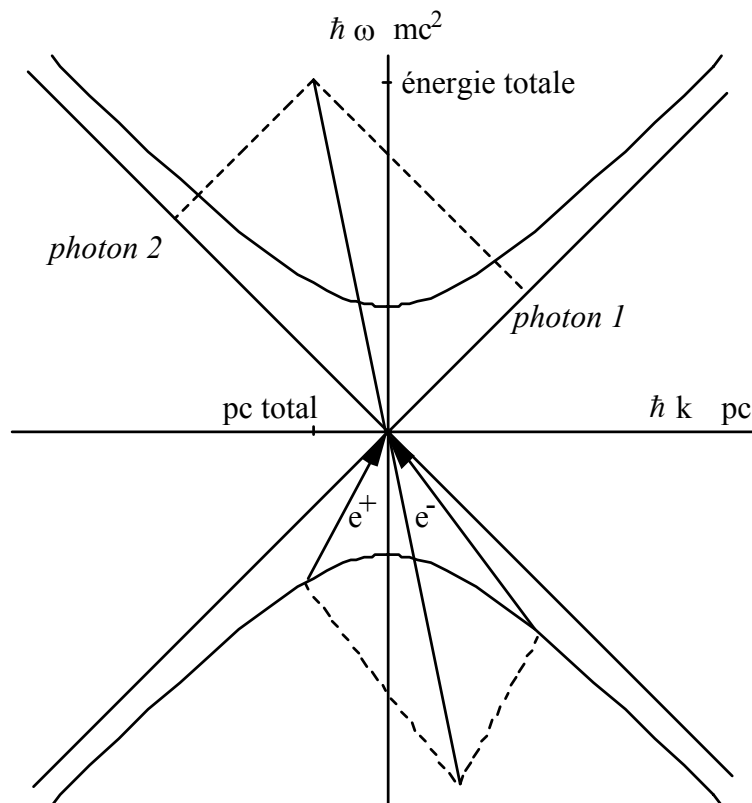


Figure VI-6.

*Exemple 2: matérialisation d'un photon.*

Il est facile de voir sur le diagramme impulsion-énergie qu'il est impossible de produire une particule massive ou une paire particule antiparticule à partir d'un seul photon même si son énergie est au moins égale à la somme des masses au repos. La présence d'un objet matériel qui emporte une partie de l'énergie et de l'impulsion disponibles est absolument nécessaire à la transformation d'un photon en particules massives. Alors par exemple, si son énergie est supérieure à 1.022 M.e.V., un photon donne naissance à une paire électron-positron.

La figure VI-7 schématise un tel événement lorsque tous les partenaires ont leur impulsion suivant Ox. Le quadrivecteur impulsion totale - énergie totale de la paire est OE. Un troisième objet matériel de masse au repos  $M_0$  (quadrivecteur OA) acquiert le reste de l'impulsion disponible (quadrivecteur OB) assurant par là même, la conservation de l'énergie et de l'impulsion entre l'état initial: photon plus objet au repos, et l'état final: paire électron positron plus objet en mouvement.

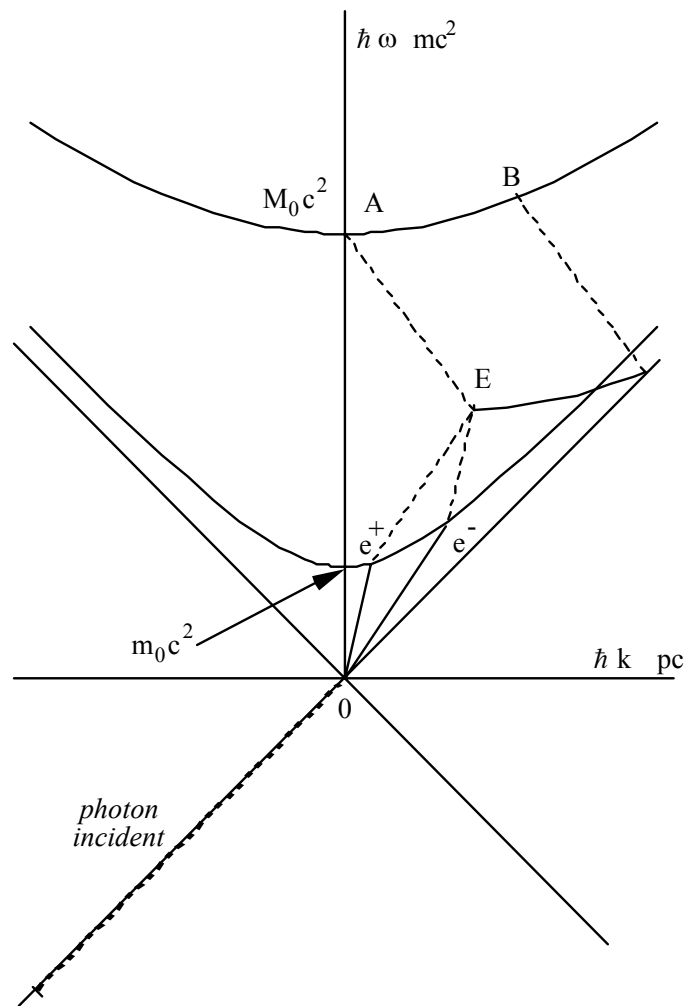


Figure VI-7.

### 36. L'effet Compton.

On peut considérer le processus de diffusion de la lumière comme une collision élastique entre un photon et une particule. C'est un des rares exemples d'interaction entre du rayonnement et un objet matériel qui ne puisse être expliqué autrement que par la nature particulaire des photons.

Le cas particulier de la diffusion d'un photon par un électron libre, est connu sous le nom d'effet Compton. Dans un diagramme plan impulsion énergie, on ne peut représenter que des collisions où tous les partenaires ont leur impulsion suivant Ox (figure VI-8).

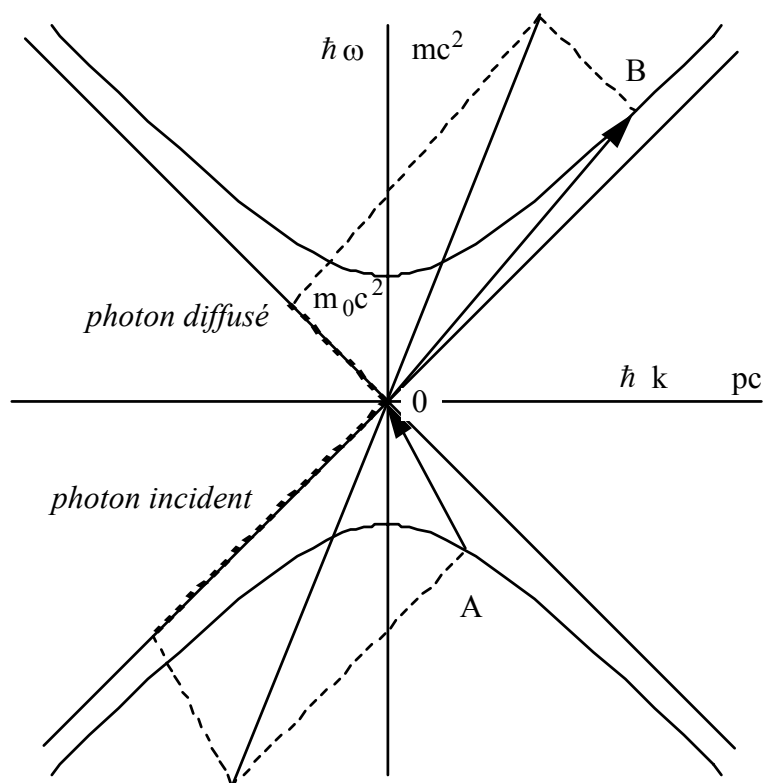


Figure VI-8.

Le photon incident sur un électron dans l'état initial correspondant au quadrivecteur AO, disparaît pour donner naissance à un photon diffusé tandis que l'électron se retrouve dans un état d'énergie impulsion différent: quadrivecteur OB. En raison de la participation de deux photons à ce processus, la transition peut concerner deux états quelconques d'énergie impulsion de l'électron.

En général, le photon diffusé a une direction différente de celle du photon incident. Supposons l'électron initialement au repos. Le photon incident a pour énergie et pour impulsion respectivement:

$$E = \hbar \omega, \quad \mathbf{p} = \frac{\hbar \omega}{c} \hat{\mathbf{x}},$$

$\mathbf{p}$  étant dirigée suivant Ox.

Le photon diffusé a pour énergie et impulsion

$$E' = \hbar \omega', \quad \mathbf{p}' = \frac{\hbar \omega'}{c} \hat{\mathbf{n}},$$

où  $\mathbf{p}'$  est dans une direction faisant un angle  $\theta$  avec l'axe des x. L'électron acquiert une énergie  $E_e$  et une impulsion  $\mathbf{p}_e$  suivant le schéma:

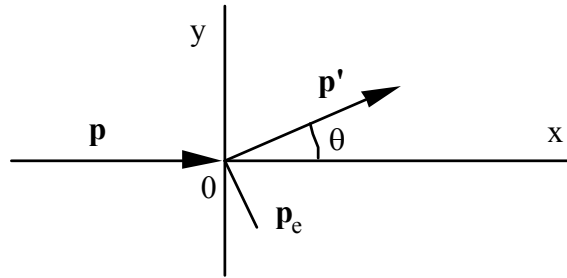


Figure VI-9.

Comme pour toute collision, on écrit la conservation de l'énergie:

$$E + m_0 c^2 = E' + E_e,$$

et la conservation de l'impulsion en projetant sur les axes:

$$\begin{aligned} p_{ex} &= \frac{\hbar \omega}{c} - \frac{\hbar \omega'}{c} \cos \theta, \\ p_{ey} &= - \frac{\hbar \omega'}{c} \sin \theta, \end{aligned}$$

d'où:

$$c^2 p_e^2 = \hbar^2 (\omega^2 - 2\omega\omega' \cos \theta + \omega'^2).$$

L'invariance de la norme du quadrivecteur impulsion-énergie de l'électron permet d'écrire:

$$E_e^2 = m_0^2 c^4 + p_e^2 c^2.$$

Calculant  $E_e$  à partir de l'énergie des photons, l'équation précédente devient:

$$\begin{aligned} (E - E' + m_0 c^2)^2 &= \hbar^2 (\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega') + 2\hbar m_0 c^2 (\omega - \omega') + m_0^2 c^4 \\ &= m_0^2 c^4 + p_e^2 c^2 \end{aligned}$$

ce qui fournit

$$c^2 p_e^2 = \hbar^2(\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega') + 2\hbar m_0 c^2(\omega - \omega').$$

En égalant les deux expressions de  $p_e^2$  que nous avons obtenues, on trouve:

$$\hbar \omega \omega' - m_0 c^2 (\omega - \omega') = \hbar \omega \omega' \cos \theta .$$

On résout pour  $\omega'$

$$(36-1) \quad \omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\hbar \omega}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)} = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{\omega_c} (1 - \cos \theta)},$$

avec

$$(36-2) \quad \omega_c = \frac{m_0 c^2}{\hbar}.$$

On écrit d'habitude cette formule pour les longueurs d'onde (grandeurs mesurées en pratique) en substituant:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad \omega' = \frac{2\pi c}{\lambda'}.$$

On trouve ainsi:

$$(36-3) \quad \lambda' = \lambda + \frac{2\pi \hbar}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = \lambda + \lambda_c (1 - \cos \theta)$$

où:

$$(36-4) \quad \lambda_c = \frac{h}{m_0 c},$$

est la **longueur d'onde de Compton**. C'est la longueur d'onde d'un rayonnement dont chaque photon à une énergie égale à l'équivalent de la masse au repos de l'électron.

Cet effet a été observé pour la première fois en 1923, dans l'interaction du rayonnement X avec la matière, sous forme d'une raie diffuse de longueur d'onde plus grande que la longueur d'onde incidente.

### 37. Ondes et particules matérielles.

Dans un milieu dispersif du type gaz d'électrons (de masse individuelle  $m$ ):

$$\mathbf{j} = -nev, \quad \text{et, en première approximation} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}.$$

Le champ électrique transverse d'une onde plane ne modifie pas la densité particulaire  $n$ , de sorte que la combinaison entre équations de Maxwell déjà utilisée au § 18 fournit maintenant

$$(37-1) \quad \omega^2 - c^2k^2 = \omega_p^2$$

où  $\omega_p$  est la fréquence (ou plus exactement la pulsation) de plasma de carré

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}.$$

C'est manifestement un invariant relativiste. En effet, dans un changement de référentiel d'inertie,  $n$  (contraction de Fitzgerald-Lorentz) et  $m$  sont multipliés par le même facteur  $\gamma$ . La relation (37-1) traduit aussi l'invariance du quadrivecteur  $(\mathbf{k}c, \omega)$ . Multipliant les deux membres par  $\hbar$ :

$$\hbar^2 \omega^2 - \hbar^2 k^2 c^2 = \hbar^2 \omega_p^2.$$

La norme invariante du quadrivecteur impulsion-énergie du photon dans un tel milieu est :

$$E^2 - p^2 c^2 = \hbar^2 \omega_p^2$$

formellement identique à celle d'une particule matérielle massive :

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4.$$

On prolonge cette analogie en attribuant à une particule matérielle une fréquence et un vecteur d'onde au moyen des relations:

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, \quad \text{et} \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar},$$

d'où une longueur d'onde

$$(38-2) \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p},$$

(L. de Broglie, 1923). Mais on se heurte à la difficulté suivante illustrée par la figure VI-10: dans le diagramme E,pc, la vitesse ( $<c$ ) est donnée par la "pente"<sup>2</sup> de la droite qui joint l'origine au point A (E,pc) selon:

$$\frac{u}{c} = \beta = \frac{E}{pc} = \operatorname{tg}\theta .$$

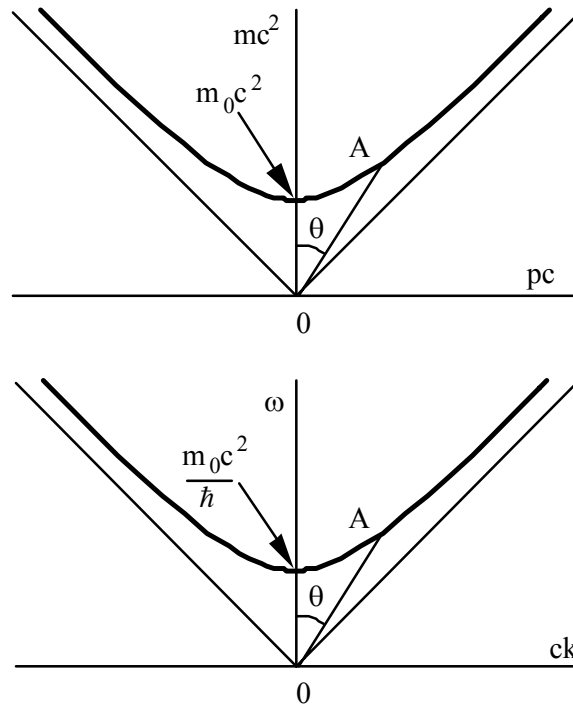


Figure VI-10 .

Dans le diagramme  $\omega, ck$ , cette même droite OA est telle que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{ck}{\omega} = \frac{c}{v_{\varphi}} ,$$

où  $v_{\varphi}$  est la vitesse de phase de l'onde associée à la particule.

Or,

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{h^2 \omega^2}}} > c .$$

Ainsi, à une particule matérielle de vitesse  $u$  évidemment inférieure à  $c$ , on fait correspondre une onde plane monochromatique de vitesse de phase supérieure à  $c$ . Une

<sup>2</sup> Inversée par rapport à la définition usuelle.

particule matérielle ne saurait donc être assimilée à une telle onde. Si par contre on calcule la vitesse de groupe (celle d'un paquet d'ondes), on trouve:

$$\frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c^2}{v_\phi} = v_g < c .$$

C'est bien conforme au résultat sur les ondes électromagnétiques: la vitesse de groupe est celle de la propagation d'une énergie (ou d'une masse). La particule matérielle est donc comparable à un paquet d'ondes autour de la fréquence  $\omega = \frac{mc^2}{\hbar}$ .

Les propriétés ondulatoires des particules se manifestent au cours d'expériences comme la diffraction des électrons. A l'inverse les propriétés particulières du rayonnement apparaissent dans tous les comptages photon par photon.