

VII.

Petit intermède mathématique.**38. Quadrivecteurs 2.**

Généralisant le contenu du § 7, on désigne par μ un indice qui prend les valeurs 0, 1, 2 ou 3. 0 désigne la composante temporelle et l'indice 1 se réfère à la composante spatiale suivant laquelle s'effectuent les mouvements de translation uniforme entre référentiels¹. Le quadrivecteur contravariant A^μ se transforme par changement de référentiel suivant

$$A'^\mu = L^\mu_\nu A^\nu,$$

(sommation sur les indices répétés) où

$$L^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

désigne la transformation de Lorentz. Le quadrivecteur covariant A_μ défini par

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3,$$

se transforme par

$$A'_\mu = \bar{L}_\nu^\mu A_\nu,$$

où

$$\bar{L}_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que le *produit scalaire* de deux quadrivecteurs

¹ Cette restriction est introduite ici par souci de simplifier l'écriture des formules. Les considérations qui vont suivre s'appliquent au cas de référentiels qui se déplacent suivant des directions quelconques. Les L^μ_ν prennent alors une forme plus compliquée: généralisation de la transformation de Lorentz appelée transformation de Poincaré, évidemment toujours linéaire.

$$A^\mu B_\mu$$

est invariant par changement de référentiel. Il en va évidemment de même pour

$$A^\mu A_\mu$$

« norme » du quadrivecteur.

39. Tenseurs

Parmi tous les objets que l'on peut construire avec des (quadri) vecteurs, figure le produit tensoriel de composantes

$$T^{\mu\nu} = (A \otimes B)^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu .$$

Pour chacune des 16 composantes d'un tel objet, la transformation de Lorentz s'applique 2 fois soit

$$T'^{\mu\nu} = L^\mu_\sigma L^\nu_\tau T^{\sigma\tau} .$$

Généralisant ce résultat on appelle tenseur du second ordre deux fois contravariant, tout objet obéissant à cette règle de transformation. Il existe également des tenseurs 2 fois covariants et des tenseurs mixtes définis par leurs règles de transformation soit

$$T'_{\mu\nu} = \bar{L}_\mu^\sigma \bar{L}_\nu^\tau T_{\sigma\tau} , \quad \text{et} \quad T'^\mu_\nu = L^\mu_\sigma \bar{L}_\nu^\tau T^\sigma_\tau ,$$

respectivement. Les éléments de ces différents tenseurs peuvent être rangés dans des tableaux carrés où l'indice μ désigne une ligne et l'indice ν une colonne. Le nombre de lignes ou de colonnes, égal au nombre de dimension de l'espace considéré, est le rang du tenseur. On utilise souvent des indices latins pour noter les composantes d'un tenseur de rang 3 dans l'espace physique ordinaire.

On généralise encore avec des tenseurs d'ordre quelconque égal au nombre d'indices. Les règles de transformation mettent en jeu un facteur L^μ_ν par indice supérieur et un facteur \bar{L}_μ^ν par indice inférieur. Dans cet échafaudage, un scalaire est un tenseur d'ordre zéro, un quadrivecteur est un tenseur d'ordre 1.

A partir des composantes du tenseur $T^{\mu\nu}$, on peut construire un scalaire en formant la somme

$$T^\mu_\mu = T_\mu^\mu = T^0_0 + T^1_1 + T^2_2 + T^3_3 ,$$

appelée *trace* du tenseur. Cette opération est un cas particulier de *contraction* d'un tenseur, sommation au moyen de laquelle on forme un tenseur de rang deux fois inférieur à celui du tenseur de départ.

Il existe des tenseurs remarquables:

- ◆ Par exemple le tenseur mixte δ_v^μ qui vérifie l'égalité

$$\delta_v^\mu A^\mu = A^v,$$

quel que soit A^μ , a pour éléments

$$\delta_v^\mu = \begin{cases} 1, & \text{pour } \mu = v, \\ 0, & \text{pour } \mu \neq v. \end{cases}$$

De l'invariance de $A^\mu A_\mu$ découle:

$$L^\sigma_\nu \bar{L}_0^\mu = \delta_\nu^\mu.$$

- ◆ Le *tenseur métrique* se déduit du précédent par élévation ou abaissement d'un indice, d'où sa définition

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'application du tenseur métrique abaisse ou élève un indice. Ainsi:

$$\begin{aligned} A_\mu &= g_{\mu\nu} A^\nu, & A^\mu &= g^{\mu\nu} A_\nu, \\ A^\mu B_\nu &= g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu, \\ \delta_\mu^\sigma &= g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma}, \\ T^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} T^\mu_\nu, \\ T_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} T_\mu^\nu. \end{aligned}$$

- ◆ Les éléments d'un *tenseur symétrique* vérifient

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}.$$

- ◆ Ceux d'un tenseur *antisymétrique* vérifient

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu},$$

ce qui entraîne que les $T^{\mu\mu}$, éléments de la diagonale principale, sont tous nuls.

Etant donnés deux tenseur ($A^{\mu\nu}$) et ($B^{\mu\nu}$), leur somme est le tenseur formé en additionnant élément par élément

$$S^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} + B^{\mu\nu} .$$

Tout tenseur du second ordre peut être décomposé en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique:

$$T^{\mu\nu} = \frac{T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}}{2} + \frac{T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}}{2} ,$$

$$T^{\nu\mu} = \frac{T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}}{2} - \frac{T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}}{2} .$$

On définit aussi le produit dont le rang est égal à la somme des rang des facteurs.

40. Transformation de Lorentz pour les opérateurs différentiels.

Pour connaître la façon dont se transforment des équations aux dérivées partielles lors d'un changement de référentiel galiléen, nous avons besoin de connaître les relations entre les opérateurs différentiels dans R et R' . Partant de la transformation de Lorentz écrite en clair,

$$x' = \gamma (x - ut)$$

$$t' = \gamma \left(-\frac{ux}{c^2} + t \right)$$

on calcule les dérivées par rapport à x et t selon la règle des fonctions de fonctions. Au premier ordre

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{u}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\gamma u \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t'} .$$

Ces relations peuvent aussi s'écrire:

$$(40-1) \quad c \frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left(c \frac{\partial}{\partial x'} - \beta \frac{\partial}{\partial t'} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left(-\beta c \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right)$$

et inversement

$$(40-2) \quad \begin{aligned} c \frac{\partial}{\partial x'} &= \gamma \left(c \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= \gamma \left(\beta c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) . \end{aligned}$$

On notera la place de c et celle du signe $-$: ce dernier apparaît lorsqu'on passe de R' à R comme dans le cas d'un quadrivecteur covariant.

Au second ordre de dérivation,

$$(40-3) \quad \begin{aligned} c^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} &= \gamma^2 \left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\beta c \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t'^2} &= \gamma^2 \left(\beta^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\beta c \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) . \end{aligned}$$

Dans les équations de Maxwell, ou plutôt dans l'équation de propagation du champ électrique dans le vide qui a les mêmes propriétés d'invariance, on rencontre l'opérateur:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

En substituant les expressions (40-3), il vient:

$$(40-4) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

qui montre qu'une transformation de Lorentz laisse invariant cet opérateur.

41. Dérivations.

Les résultats du § précédent sur la transformation des opérateurs différentiels se mettent sous la forme générale :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)' = \bar{L}_\nu{}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} .$$

C'est la règle de transformation du quadrivecteur covariant $(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla)$. On note

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} ,$$

cette *dérivation covariante*.

De la même façon, les dérivées partielles $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ sont les composantes du quadrivecteur $(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla)$. A noter que, dans le cas des dérivées par rapport aux coordonnées d'espace:

$$\partial^j = - \partial_j .$$

On généralise la notion de *divergence* à un quadrivecteur selon la définition

$$\partial^\mu A_\mu = \partial_\mu A^\mu = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \nabla \cdot \mathbf{A} ,$$

où \mathbf{A} est la partie spatiale. Elle est invariante par changement de référentiel. En effet, soit (cT, \mathbf{R}) un quadrivecteur dans R . Pour une translation uniforme le long de la composante X de \mathbf{R} , la transformation de Lorentz s'écrit en ignorant les coordonnées passives Y et Z ,

$$\begin{aligned} cT &= \gamma (\beta X' + cT') , \\ X &= \gamma (X' + \beta cT') . \end{aligned}$$

Dans la divergence de ce quadrivecteur soit

$$\frac{\partial cT}{\partial ct} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{R} ,$$

le groupement passif $\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ est évidemment invariant. Pour les deux autres termes, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} &= \frac{\partial \gamma (\beta X' + cT')}{\partial ct} + \frac{\partial \gamma (X' + \beta cT')}{\partial x} \\ &= \gamma \left(\beta \frac{\partial X'}{\partial ct'} + \frac{\partial cT'}{\partial ct'} \right) \frac{\partial t'}{\partial t} + \gamma \left(\beta \frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial cT'}{\partial x'} \right) \frac{\partial x'}{\partial x} \\ &\quad + \gamma \left(\frac{\partial X'}{\partial ct'} + \beta \frac{\partial cT'}{\partial ct'} \right) \frac{\partial t'}{\partial t} + \gamma \left(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \beta \frac{\partial cT'}{\partial x'} \right) \frac{\partial x'}{\partial x} . \end{aligned}$$

Or, les relations de base de la transformation de Lorentz

$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - \beta ct) , \\ ct' &= \gamma (-\beta x + ct) . \end{aligned}$$

entraînent

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma, \quad \frac{\partial x'}{\partial ct} = \frac{\partial ct'}{\partial x} = -\beta\gamma.$$

Les termes en $\frac{\partial X'}{\partial ct'}$ et $\frac{\partial c\Gamma}{\partial x'}$ s'éliminent et il reste

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = \gamma^2 (1 - \beta^2) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t'} + \frac{\partial X'}{\partial x'} \right).$$

Si en particulier la divergence d'un quadrivecteur est nulle dans un référentiel galiléen, elle est nulle dans tous les autres.

La divergence d'un tenseur du second ordre est un quadrivecteur de composantes

$$\partial_\mu A^{\mu\nu}.$$

Autre résultat du § précédent, l'opérateur du second ordre

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu 2}} - \nabla^2,$$

est également invariant par changement de référentiel.