VIII

Le champ électromagnétique

42. Le quadrivecteur densité de charge, densité de courant.

Les équations de Maxwell peuvent être divisées en deux groupes: des équations sans source (première ligne) et des équations avec sources (deuxième ligne):

$$\text{(42-1)} \qquad \begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{B}=0, && \nabla\wedge\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\ &\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}, && \nabla\wedge\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

où ρ est la densité de charge et $\mathbf{j}$ la densité de courant. Dérivant la première équation avec sources par rapport au temps et prenant la divergence de la seconde, on obtient l'équation de conservation de la charge

$$\text{(42-2)} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0.$$

On reconnaît dans cette équation une divergence.

Nous pouvons donc interpréter (42-2) de la façon suivante: $\mathbf{j}$ et ρc forment un quadrivecteur à divergence nulle (quadricourant). Sa norme invariante est

$$\text{(42-3)} \qquad \rho^2c^2 - j^2 = \rho_0{}^2c^2.$$

(42-2) est d'autre part très semblable à l'équation de continuité de l'hydrodynamique qui traduit la conservation du nombre de particules

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\mathbf{v}) = 0,$$

et que nous interprétons: $n\mathbf{v}$ et nc forment également un quadrivecteur à divergence nulle.

Or l'expérience (Millikan) nous apprend qu'il existe une charge élémentaire e (=1.6 10^{-19} Coulomb). La densité de courant résulte du bilan du mouvement des charges. Imaginons que le courant ne soit dû qu'au déplacement d'électrons (chacun portant la charge - e). Un élément fluide du gaz d'électrons est animé de la vitesse $\mathbf{v}$ dans R. Localement:

$$\rho = -\,ne, \qquad \mathbf{j} = -\,ne\mathbf{v}\,.$$

Nous sommes donc fondés à admettre que la *charge élémentaire* e a un statut d'*invariant relativiste*.

Ce point acquis, montrons que **j** et ρc forment bien un quadrivecteur et que nous obtenons ainsi une formulation cohérente. Supposons la vitesse **v** uniforme. Alors, la densité particulaire dans R tient compte de la contraction de Fitzgerald Lorentz

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = n_0\gamma_v\,,$$

où n_0 est la densité qu'aurait le gaz d'électrons en l'absence de mouvement d'ensemble. Dans ces conditions

$$\rho = -\,en = -\,en_0\gamma_v$$
$$\mathbf{j} = -\,en\mathbf{v} = -\,en_0\gamma_v\mathbf{v}\,.$$

(**j**,ρc) est le produit de $-en_0$ par la quadrivitesse. C'est un quadrivecteur.

On le vérifie directement en considérant un référentiel R' se déplaçant par rapport à R avec la vitesse **u** parallèle à **v**, on a d'abord la relation entre facteurs de Lorentz:

$$\gamma_{v'} = \gamma_u\gamma_v(1 - \frac{uv}{c^2}),$$

d'où, toutes les vitesses étant parallèles:

$$j' = -\,en_0\gamma_{v'}v' = -\,en_0\gamma_u\gamma_v(v - u) = -\,en_0\gamma_u(\gamma_v v - \beta_u c\gamma_v) = \gamma_u(j - \beta_u\rho c)\,.$$

De même:

$$\rho' = -\,en_0\gamma_{v'} = -\,en_0\gamma_u\gamma_v(1 - \frac{uv}{c^2})$$

de sorte que:

$$\rho'c = -\,en_0\gamma_u(-\,\beta_u v\gamma_v + c\gamma_v) = \gamma_u(-\,\beta_u j + \rho c)\,.$$

j et ρc obéissent à la transformation de Lorentz. C.Q.F.D.

43. Le quadripotentiel.

Les équations de Maxwell sont écrites en termes de champs électrique et magnétique dérivant d'un potentiel scalaire ϕ et d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}$ selon les relations :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B} = \nabla\wedge\mathbf{A}.$$

Utilisant ces égalités dans les équations avec sources, il vient :

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} - \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}.$$

Après arrangement:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} - \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A}\right).$$

Sous la condition:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A} = 0, \tag{43-1}$$

qui définit la **jauge de Lorentz**, on trouve deux équations découplées de même forme en ϕ et $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} &= \mu_0\mathbf{j} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}. \end{aligned} \tag{43-2}$$

Or $\mathbf{j}$ et ρc forment un quadrivecteur et d'autre part, les opérateurs différentiels des premiers membres sont invariants par transformation de Lorentz. Les équations (43-2) sont invariantes par transformation de Lorentz. Il en est évidemment de même pour les équations de Maxwell dont elles sont issues.

Ainsi, $\mathbf{A}$ et $\frac{\phi}{c}$ forment un quadrivecteur dont (43-1) nous montre qu'il est à divergence nulle. Ce quadrivecteur, le **quadripotentiel**, se transforme par:

$$A'_{x'} = \gamma\left(A_x - \beta\frac{\phi}{c}\right),$$
$$A'_{y'} = A_y\ ,$$
$$A'_{z'} = A_z\ ,$$
$$\frac{\phi'}{c} = \gamma\left(-\beta A_x + \frac{\phi}{c}\right).$$

44. Transformation du champ électromagnétique.

Pour passer des champs **E** et **B** dans le référentiel R à ces mêmes champs dans un référentiel R', nous allons utiliser la transformation de Lorentz pour le quadripotentiel et appliquer les formules de transformation des dérivées premières

$$c\,\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\left(c\,\frac{\partial}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial}{\partial t}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\left(\beta c\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

aux expressions des champs dérivant du quadripotentiel. On trouve ainsi

$$E'_{x'} = -c\,\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\phi'}{c}\right) - \frac{\partial A'_{x'}}{\partial t'} = -\gamma^2\left(1-\beta^2\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) = E_x\ .$$

Pour les autres composantes:

$$E'_{y'} = -c\,\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\phi'}{c}\right) - \frac{\partial A'_{y'}}{\partial t'} = -\gamma\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t}\right) + \gamma u\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)$$
$$= \gamma\left(E_y - uB_z\right),$$

$$E'_{z'} = \gamma\left(E_z + uB_y\right).$$

On calcule de même:

$$B'_{x'} = \frac{\partial A'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial A'_{y'}}{\partial z'} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x\ ,$$

puis:

$$B'_{y'} = \frac{\partial A'_{x'}}{\partial z'} - \frac{\partial A'_{z'}}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \gamma\,\frac{u}{c^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\right)$$
$$= \gamma\left(B_x + \frac{u}{c^2}\,E_z\right),$$

$$B'_{z'} = \gamma\left(B_z - \frac{u}{c^2} E_y\right).$$

On reconnaît dans le second membre des formules correspondant aux composantes des champs orthogonales au mouvement du référentiel R', les composantes des produits vectoriels $\mathbf{u}\wedge\mathbf{B}$ et $\frac{\mathbf{u}}{c^2}\wedge\mathbf{E}$. On écrit donc la transformation du champ électromagnétique lors d'un changement de référentiel d'inertie :

$$E'_{x'} = E_x , \qquad B'_{x'} = B_x ,$$

$$E'_{y'} = \gamma\left(\mathbf{E} + \mathbf{u}\wedge\mathbf{B}\right)_y \qquad B'_{y'} = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}}{c^2}\wedge\mathbf{E}\right)_y$$

$$E'_{z'} = \gamma\left(\mathbf{E} + \mathbf{u}\wedge\mathbf{B}\right)_z \qquad B'_{z'} = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}}{c^2}\wedge\mathbf{E}\right)_z$$

Une forme plus compacte s'obtient en décomposant les vecteurs en une composante parallèle à la vitesse $\mathbf{u}$ de translation du référentiel mobile et une composante orthogonale.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{//} + \mathbf{E}_{\perp} , \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{//} + \mathbf{B}_{\perp} .$$

Ainsi:

$$\boxed{\begin{array}{lll} & E'_{//} = E_{//} , & B'_{//} = B_{//} , \\ (44\text{-}1) & & \\ & E'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{E} + \mathbf{u}\wedge\mathbf{B}\right)_{\perp} & B'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}}{c^2}\wedge\mathbf{E}\right)_{\perp} . \end{array}}$$

La transformation des champs électrique et magnétique n'est évidemment pas celle de Lorentz. $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ y apparaissent indissociables. Ce sont deux aspects d'une même réalité: l'interaction électromagnétique dont la loi de force s'exprime à l'aide de ces deux champs. Sur une particule chargée s'exerce la force de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{B})$$

à partir de laquelle on peut construire le quadrivecteur force travail (C.F. § 28)

$$\gamma_v c\mathbf{F} = \gamma_v cq(\mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{B}),$$
$$\gamma_v(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}) = \gamma_v q(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}) .$$

La dernière égalité est justifiée par le fait que $\mathbf{v}$ est orthogonale au produit vectoriel $\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$.

Ni **E** ni **B** ne sont des quadrivecteurs. Il existe cependant **deux invariants** du champ. D'abord:

$$E'^2 - c^2B'^2 = E'^2_{//} + E'^2_{\perp} - c^2B'^2_{//} - c^2B'^2_{\perp}$$
$$= E_{//}^2 + \gamma^2(\mathbf{E} + \mathbf{u}\wedge\mathbf{B})_{\perp}^2 - c^2B_{//}^2 - c^2\gamma^2(\mathbf{B} - \mathbf{u}\wedge\mathbf{E}/c^2)_{\perp}^2 .$$

Or:

$$|\mathbf{u}\wedge\mathbf{B}|^2 = (\beta c B_{\perp})^2 , \qquad \text{et} \qquad |\mathbf{u}\wedge\mathbf{E}/c^2|^2 = (\beta E_{\perp})^2/c^2,$$

de sorte que les termes croisés s'éliminent et:

$$E'^2 - c^2B'^2 = E_{//}^2 + \gamma^2(1 - \beta^2)E_{\perp}^2 - c^2B_{//}^2 - c^2\gamma^2(1 - \beta^2)B_{\perp}^2 = E^2 - c^2B^2 .$$

Ensuite:

$$\mathbf{E'}\cdot\mathbf{B'} = E_xB_x + \gamma^2\,(E_y-uB_z)\left(B_y+\frac{u}{c^2}E_z\right) + \gamma^2\,(E_z+uB_y)\left(B_z-\frac{u}{c^2}E_y\right)$$

$$= E_xB_x + \gamma^2(1 - \beta^2)E_yB_y + \gamma^2(1 - \beta^2)E_zB_z = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} .$$

On a donc finalement les **deux invariants**:

$$\boxed{E^2 - c^2B^2 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\ .}$$

45. Le tenseur du champ électromagnétique. Forme tensorielle des équations.

Tel qu'il vient d'être présenté, le champ électromagnétique est décrit par des objets mathématiques, vecteurs, qui s'inscrivent dans l'espace physique à 3 dimensions. Il convient maintenant de rechercher quels objets représentent ce champ dans l'espace-temps à 4 dimensions de la relativité restreinte. Or les champs électrique et magnétique dérivent du quadripotentiel. On les obtient en procédant à des différenciations réécrites ici par exemple pour les composantes suivant Ox:

$$\frac{E_x}{c} = -\frac{\partial A_x}{\partial ct} - \frac{\partial \frac{\phi}{c}}{\partial x} = -\left(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0\right),$$
$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\left(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2\right).$$

Ces composantes qui dépendent de deux indices sont les éléments d'un tenseur du second ordre antisymétrique deux fois contravariant. En effet, on obtient immédiatement

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = -\frac{E_x}{c} = -F^{10},$$
$$F^{23} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 = -B_x = -F^{23}.$$

La forme généralement adoptée du tenseur du champ électromagnétique s'écrit

$$\left(F^{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -c\,B_z & c\,B_y \\ E_y & c\,B_z & 0 & -c\,B_x \\ E_z & -c\,B_y & c\,B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Le tenseur doublement covariant associé est obtenu en appliquant la règle

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} F^{\sigma\tau}.$$

Il s'écrit

$$\left(F_{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -c\,B_z & c\,B_y \\ -E_y & c\,B_z & 0 & -c\,B_x \\ -E_z & -c\,B_y & c\,B_x & 0 \end{pmatrix},$$

différent du précédent par changement de signe des composantes électriques.

Les composantes électriques E_x, E_y et E_z forment un vecteur polaire (vrai vecteur dont les composantes changent de signe lorsqu'on inverse le sens des axes)) dans l'espace physique tridimensionnel tandis que les composantes magnétiques forment un tenseur antisymétrique de rang 3 qui est aussi un vecteur axial (pseudo vecteur dont les composantes ne changent pas de signe par réflexion — propriété du produit vectoriel —) dans ce même espace. On peut donc écrire de façon concise:

$$\left(F^{\mu\nu}\right) = \left(-\mathbf{E},\ c\mathbf{B}\right);\ \left(F_{\mu\nu}\right) = \left(\mathbf{E},\ c\mathbf{B}\right).$$

Les équations de Maxwell avec sources

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla \wedge c\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c},$$

ont également une expression tensorielle. La première est aussi

$$\partial_\mu F^{0\mu} = \frac{j^0}{\varepsilon_0},$$

tandis que chacune des composantes de la seconde peut se mettre sous la forme

$$\partial_\mu F^{i\mu} = \frac{j^i}{\varepsilon_0 c}\ , \ (i = 1,2,3)\ .$$

Dans ces équations le quadrivecteur courant est (ρ, $\frac{\mathbf{j}}{c}$). On peut donc énoncer que la divergence du tenseur du champ est égale au quadricourant divisé par ε_0. soit:

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = \frac{j^\nu}{\varepsilon_0 c}\ . \qquad (45\text{-}1)$$

Pour l'autre paire d'équations, sans sources,

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0\ , \qquad \nabla \bullet \mathbf{B} = 0\ ,$$

on constate d'abord que la dernière est

$$\partial_1 F^{23} + \partial_2 F^{31} + \partial_3 F^{12} = 0\ .$$

De même par exemple la composante suivant Ox de la première est

$$\partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} + \partial_0 F^{23} = 0\ .$$

On aura finalement 4 équations de forme

$$\partial_\mu F^{\nu\sigma} + \partial_\nu F^{\sigma\mu} + \partial_\sigma F^{\mu\nu} = 0\ , \qquad (45\text{-}2)$$

où les indices doivent être tous différents.

L'ensemble (45-1) (45-2) constitue la forme tensorielle covariante des équations du champ électromagnétique. Associés à celui-ci la densité d'énergie et la densité de flux d'énergie s'écrivent dans l'espace physique à 3 dimensions

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E^2 + c^2 B^2\right),$$

$$\Phi = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}\ .$$

Dans l'espace-temps à 4 dimensions, on a affaire à un tenseur d'énergie impulsion (présenté ici sans démonstration) dont l'expression générale des composantes est

$$T^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(g^{\mu\sigma} F_{\sigma\tau} F^{\tau\nu} + \frac{g^{\mu\nu}}{4} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}\right).$$

Ce tenseur est symétrique. On notera que:

$$T^{00} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E^2 + c^2B^2\right), \qquad \text{densité d'énergie,}$$

$$T^{0i} = \left(\frac{\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}}{\mu_0}\right)_i, \qquad \text{composante du vecteur de Poynting,}$$

$$T^{ij} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[E^iE_j + c^2B^iB_j - \frac{\delta_{ij}}{2}\left(E^2 + c^2B^2\right)\right].$$

Passons enfin à l'équation du mouvement d'une charge électrique q dans un champ électromagnétique. Dans l'espace physique à 3 dimensions, elle est soumise à la force de Lorentz et le mouvement obéit à l'équation

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{B}).$$

Considérons l'équation relative à la composante suivant Ox par exemple et multiplions les deux membres par $\gamma_v c$. Alors

$$\gamma_v c\,\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp^1}{dt_0} = q\left(E_x\gamma_v c + \gamma_v v_y cB_z - \gamma_v v_z cB_y\right) = q\left(F^{1\mu}v_\mu\right),$$

où p^1 et v^1 sont les composantes suivant Ox de la quadri-impulsion (E, **p**c) et de la quadrivitesse (γ_vc, γ_v**v**), respectivement, et t_0 est le temps propre. Multipliant maintenant le travail de la force par γ_v, il vient (C.F. § 28)

$$\mathbf{F}\bullet\gamma_v\mathbf{v} = \gamma_v m_0 c^2\,\frac{d\gamma_v}{dt} = \frac{dp^0}{dt_0} = q\left(E_x\gamma_v v_x\right) = q\,F^{0\mu}v_\mu.$$

D'où l'équation du mouvement écrite sous forme covariante dans l'espace-temps à quatre dimensions

$$\frac{dp^\mu}{dt_0} = q\,F^{\mu\nu}v_\nu. \qquad (45\text{-}3)$$