

III

Transformation des vitesses

La transformation de Lorentz entraîne de profondes modifications des règles de cinématique: composition des vitesses, transformation des accélérations.

12. Règle de composition des vitesses.

Soit un objet animé d'une vitesse \mathbf{v} (v_x, v_y, v_z) dans le référentiel R. Il a dans R' une vitesse \mathbf{v}' (v'_x, v'_y, v'_z) dont nous allons calculer les composantes. On passe des coordonnées dans R à celles dans R' au moyen de la transformation de Lorentz:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - \beta ct) \\y' &= y \\z' &= z \\ct' &= \gamma(-\beta x + ct)\end{aligned}$$

Une composante de la vitesse est la dérivée de la coordonnée correspondante par rapport au temps. Dans R:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Pour obtenir dans R', les composantes de la vitesse en fonction de v_x, v_y, v_z et c , on différencie d'abord la transformation de Lorentz:

$$\begin{aligned}dx' &= \gamma(dx - \beta cdt) \\dy' &= dy \\dz' &= dz \\cdt' &= \gamma(-\beta dx + cdt).\end{aligned}$$

D'où en divisant chacune des trois premières équations précédentes, membre à membre, par la dernière

$$\frac{v'_{x'}}{c} = \frac{dx'}{cdt'} = \frac{dx - \beta cdt}{-\beta dx + cdt} = \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{-\beta \frac{dx}{dt} + c}$$

$$\frac{v'_{y'}}{c} = \frac{dy'}{cdt'} = \frac{dy}{\gamma(-\beta dx + cdt)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma(-\beta \frac{dx}{dt} + c)}$$

$$\frac{v'_{z'}}{c} = \frac{dz'}{cdt'} = \frac{dz}{\gamma(-\beta dx + cdt)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma(-\beta \frac{dx}{dt} + c)}$$

puis en réarrangeant,

$$(12-1) \quad \begin{aligned} v'_{x'} &= \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \\ v'_{y'} &= \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}, \\ v'_{z'} &= \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}. \end{aligned}$$

Pour la transformation inverse, on peut partir de la transformation inverse de Lorentz et faire le même type de calcul. On peut aussi procéder à partir des formules précédentes. On obtient ainsi directement, en vertu de la démocratie des référentiels d'inertie et après changement de u en $-u$:

$$(12-2) \quad \begin{aligned} v_x &= \frac{v'_{x'} + u}{1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}}, \\ v_y &= \frac{v'_{y'}}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)}, \\ v_z &= \frac{v'_{z'}}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)}. \end{aligned}$$

Il est clair que la transformation obtenue pour les vitesses **n'est pas** celle de Lorentz.

13. Relations entre facteurs de Lorentz.

Dans R' , le carré du module du vecteur vitesse v' est:

$$|\mathbf{v}'|^2 = v'^2_{x'} + v'^2_{y'} + v'^2_{z'} = \frac{1}{\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2} \left[(v_x - u)^2 + \frac{v_y^2 + v_z^2}{\gamma^2} \right].$$

Or, utilisant l'identité:

$$\frac{u^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} = 1$$

on calcule:

$$(v_x - u)^2 = v_x^2 + u^2 - 2uv_x = \frac{v_x^2}{\gamma^2} + \frac{v_x^2 u^2}{c^2} + u^2 - 2uv_x = \frac{v_x^2 - c^2}{\gamma^2} + c^2 \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2.$$

Il vient alors:

$$v'^2 = \frac{v^2 - c^2}{\gamma^2 \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2} + c^2 = c^2 \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2}\right].$$

Cette relation se met sous une forme plus symétrique:

$$(13-1) \quad 1 - \frac{v'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2}.$$

C'est aussi, sous forme compacte:

$$(13-2) \quad \gamma_{v'} = \gamma_u \gamma_v \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)$$

avec :

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \gamma_{v'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}.$$

On associe de la sorte un facteur de Lorentz γ à chacune des vitesses intervenant dans la loi de composition. Inversement:

$$(13-3) \quad \gamma_v = \gamma_u \gamma_{v'} \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2}\right).$$

En remarquant que uv_x et uv'_x sont les produits scalaires $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$ respectivement, on écrit les relations suivantes, indépendantes des directions des vitesses,

$$\gamma_{v'} = \gamma_u \gamma_v \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right),$$

$$\gamma_v = \gamma_u \gamma_{v'} \left(1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'}{c^2}\right).$$

Les formules de transformation des vitesses n'impliquent aucune hypothèse particulière sur les vitesses v et v' . Mais, en établissant la relation (13-2) entre facteurs de Lorentz, nous avons au passage trouvé l'égalité (13-1). Notant que pour les déplacements de référentiels d'inertie on a toujours $u < c$, il en résulte que $1 - \frac{v'^2}{c^2}$ a toujours le signe de $1 - \frac{v^2}{c^2}$, ce qui entraîne les effets suivants:

- i) Un objet matériel (massif) se déplace dans R avec une vitesse $v < c$. Sa vitesse v' dans tout autre référentiel R' est donc également inférieure à c .
- ii) Il existe des vitesses de phase ou de balayage qui ne sont pas liées au déplacement d'un objet massif. Si une telle vitesse est supérieure à c dans un certain référentiel d'inertie (ce que rien n'interdit) il en sera de même dans tous les autres.
- iii) Enfin, pour un signal lumineux émis par exemple dans R ($v = c$), la loi de composition des vitesses entraîne automatiquement que dans tout autre référentiel R' , $v' = c$, résultat attendu puisque la transformation de Lorentz découle précisément de l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel d'inertie.

14. Quadrivitesse.

Revenons à (13-3). Éliminant $1 + \frac{uv'_x}{c^2}$ entre cette relation et l'expression, obtenue en (13-2), de v_x en fonction de v'_x , on trouve lorsque la vitesse v est inférieure à c :

$$\gamma_v v_x = \gamma_u (\gamma_{v'} v'_x + \beta_u \gamma_{v'} c).$$

D'autre part :

$$\gamma_v c = \gamma_u (\beta_u \gamma_{v'} v'_x + \gamma_{v'} c).$$

Ainsi, $\gamma_v \mathbf{v}$ et $\gamma_v c$ obéissent à la transformation de Lorentz. Elles forment un quadrivecteur (quadrivitesse) de norme invariante :

$$\gamma_v^2 c^2 - \gamma_v^2 v^2 = c^2.$$

En mécanique non relativiste la vitesse est un vecteur dont les trois composantes sont obtenues par dérivation des coordonnées par rapport au temps

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{avec} \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

où \mathbf{v} , \mathbf{r} et t sont mesurés dans le même référentiel d'espace-temps R . Pour les composantes de la quadrivitesse, t_0 étant le temps propre,

$$\begin{aligned}v^1 &= \gamma_v v_x = \gamma_v \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt_0}, \\v^2 &= \gamma_v v_y = \gamma_v \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt_0}, \\v^3 &= \gamma_v v_z = \gamma_v \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt_0}, \\v^0 &= \gamma_v c = \gamma_v \frac{dct}{dt} = \frac{dct}{dt_0}.\end{aligned}$$

Ainsi la quadrivitesse généralise la vitesse de la mécanique non relativiste: elle a pour composantes les dérivées, par rapport au temps propre, des composantes du quadrivecteur position dans l'espace-temps.

15. Accélération.

On peut définir dans la foulée une quadri-accélération au moyen d'une dérivation supplémentaire

$$\begin{aligned}a^1 &= \frac{dv^1}{dt_0}, \\a^2 &= \frac{dv^2}{dt_0}, \\a^3 &= \frac{dv^3}{dt_0}, \\a^0 &= \frac{dv^0}{dt_0},\end{aligned}$$

avec la propriété, déduite de la relation d'invariance de la quadrivitesse,

$$a^0 v^0 - (a^1 v^1 + a^2 v^2 + a^3 v^3) = 0,$$

ce qui est aussi la «relation d'orthogonalité»

$$a^\mu v_\mu = 0.$$

Mais revenons aux relations de transformation (12-2). Il vient en les différenciant

$$\begin{aligned}dv_x &= \frac{dv'_{x'}}{1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}} - \frac{v'_{x'} + u}{\left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^2} \frac{u dv'_{x'}}{c^2} = \frac{dv'_{x'}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^2}, \\dv_{y/z} &= \frac{dv'_{y'/z'}}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)} - \frac{v'_{y'/z'}}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^2} \frac{u dv'_{x'}}{c^2},\end{aligned}$$

ce qui permet de calculer les relations entre les accélérations par

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^2} \frac{dv'_{x'}}{dt'} \frac{dt'}{dt},$$

$$\frac{dv_{y/z}}{dt} = \left[\frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)} \frac{dv'_{y'/z'}}{dt'} - \frac{v'_{y'/z'}}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^2} \frac{u}{c^2} \frac{dv'_{x'}}{dt'} \right] \frac{dt'}{dt}.$$

Or, $c dt = \gamma (\beta dx' + c dt')$ entraîne

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{u v'_{x'}}{c^2}\right)},$$

d'où finalement les formules cherchées

$$(15-1) \quad a_x = \frac{1}{\gamma^3 \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^3} a'_{x'},$$

$$a_{y/z} = \frac{a'_{y'/z'}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^2} - \frac{uv'_{y'/z'}}{c^2} \frac{a'_{x'}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^3}.$$

Rappelons qu'elles s'appliquent uniquement lorsque les mouvements des référentiels sont de translation uniforme.

Si l'on considère à un instant donné, dans le référentiel propre R_0 d'un objet en mouvement les deux composantes de l'accélération, l'une $a_{//0}$ parallèle à la direction de la vitesse, l'autre $a_{\perp 0}$ qui lui est orthogonale, les composantes de l'accélération dans un référentiel galiléen quelconque sont en toute généralité

$$(15-2) \quad a_{//} = \frac{1}{\gamma^3} a_{//0},$$

$$a_{\perp} = \frac{a_{\perp 0}}{\gamma^2}.$$

16. L'expérience de Fizeau.

La loi de composition des vitesses, telle qu'elle résulte de l'application de la transformation de Lorentz aux changements de référentiels d'inertie, avait fait l'objet d'une vérification avant la lettre dans une expérience célèbre effectuée par H.L. Fizeau en 1850 (*C.R. Acad. Sciences Paris*, **XXXIII**-1851, p. 349). Il s'agissait de mesurer

l'entraînement des ondes lumineuses dans un milieu transparent dont l'indice de réfraction est:

$$\eta = \frac{c}{v_\phi}$$

où v_ϕ est la vitesse de phase des ondes lumineuses.

Si ce milieu est animé d'une vitesse algébrique u dans la direction de propagation des ondes, la vitesse de phase de celles-ci dans un référentiel fixe est d'après la loi de composition des vitesses relativiste:

$$v_{//} = \frac{v_\phi + u}{1 + \frac{uv_\phi}{c^2}} = (v_\phi + u) \left(1 - \frac{uv_\phi}{c^2}\right) \text{ lorsque } \frac{u}{c} \ll 1.$$

A l'ordre le plus bas en $\frac{u}{c}$:

$$\frac{v_{//}}{c} = \left(\frac{v_\phi}{c} + \frac{u}{c}\right) \left(1 - \frac{uv_\phi}{c^2}\right) = \frac{v_\phi}{c} + \frac{u}{c} \left(1 - \frac{v_\phi^2}{c^2}\right) = \frac{v_\phi}{c} + \frac{u}{c} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right).$$

Un montage interférométrique permet de mettre en évidence la différence entre les deux vitesses $v_{//}$ et $v_{a//}$ correspondant à des valeurs de u opposées. Dans sa version traditionnelle, l'expérience utilise un double courant d'eau obtenu par circulation dans un tube en U.

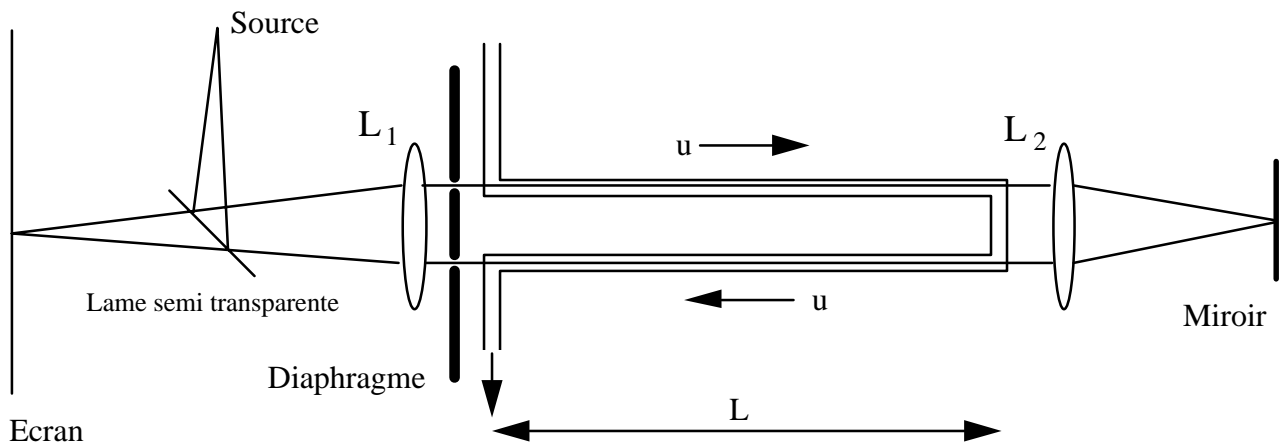


Figure III-1.
Montage originel de l'expérience de Fizeau.

Deux pinceaux lumineux issus d'une même source, parcourent le dispositif en sens inverse, chacun voyageant dans l'eau sur une longueur $2L$, et après passage par deux trous de petites dimensions, viennent interférer au voisinage du foyer de la lentille L_1 : la

position des franges sur l'écran est différente selon que l'eau est immobile, ou circule avec la vitesse u .

Dans ce dernier cas, un déphasage résulte de la différence entre les temps de parcours:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{2L}{v_{//}} - \frac{2L}{v_{a//}} = 2L \left[\frac{1}{v_{\phi} + u \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right)} - \frac{1}{v_{\phi} - u \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right)} \right] \\ &= 2L \frac{-2u \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right)}{v_{\phi}^2 - u^2 \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right)^2} = \frac{4Lu}{v_{\phi}^2} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right). \end{aligned}$$

Dans le montage originel de Fizeau, les interférences se produisent au voisinage du foyer d'une lentille selon le schéma suivant:

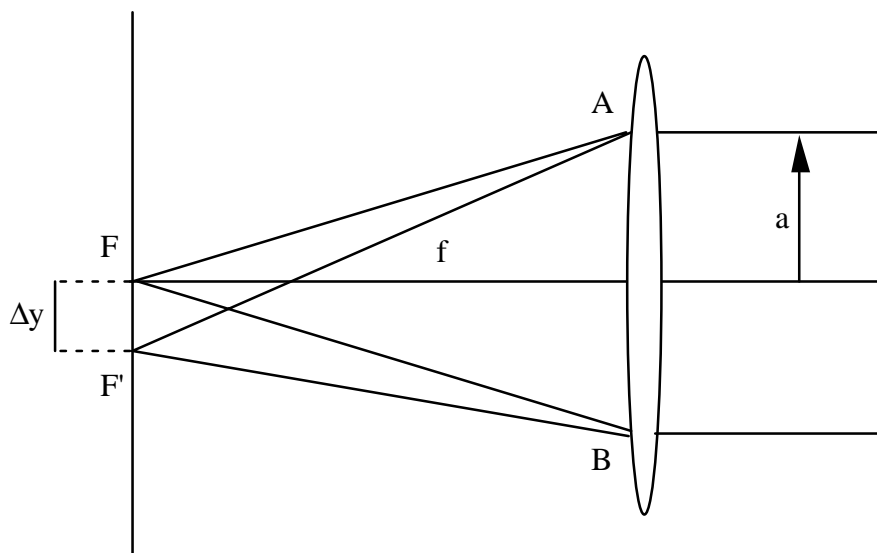


Figure III-2.

Déplacement des franges d'interférence dans l'expérience de Fizeau.

La frange centrale se déplace d'une quantité Δy telle que la différence de marche entre les rayons AF' et BF' compense exactement le déphasage induit par le mouvement de l'eau:

$$\sqrt{f^2 + (a + \Delta y)^2} - \sqrt{f^2 + (a - \Delta y)^2} = c \Delta t.$$

Δy étant petit, on développe au 1er ordre:

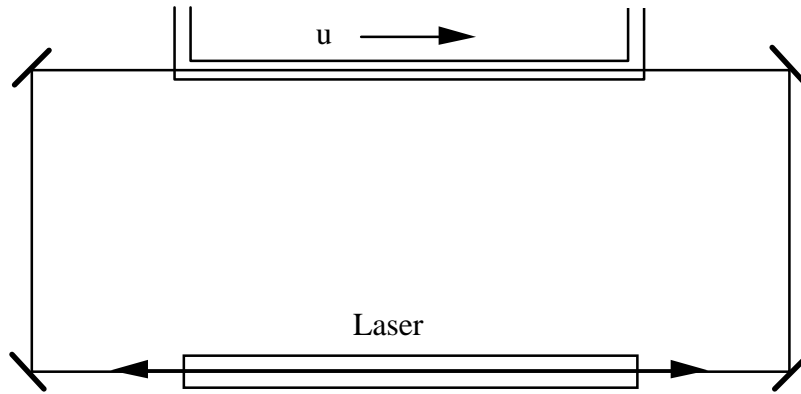
$$\sqrt{f^2 + a^2} \left[\sqrt{1 + \frac{2a\Delta y}{f^2 + a^2}} - \sqrt{1 - \frac{2a\Delta y}{f^2 + a^2}} \right] - \frac{2a\Delta y}{\sqrt{f^2 + a^2}} = c \Delta t.$$

On trouve ainsi un déplacement proportionnel à u :

$$\Delta y = 2 \frac{cu}{v_{\varphi}^2} L \sqrt{1 + \frac{f^2}{a^2} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right)}.$$

L'expérience montre que le déplacement des franges est bien conforme à cette formule.

Une version moderne de l'expérience de Fizeau fait appel à un laser en anneau et au lieu d'interférences, on observe le spectre de l'émission laser. Dans un tel dispositif, un mode de pulsation ω appartenant à la raie d'émission est amplifié si la distance finie parcourue par la lumière à chaque tour contient un nombre entier de fois la longueur d'onde λ correspondante. Ainsi λ ou le nombre d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ sont imposés.



*Figure III-3.
Version moderne de l'expérience de Fizeau.*

Dans la partie du trajet optique traversant le liquide immobile

$$\frac{\omega}{k} = v_{\varphi} = \frac{c}{\eta}.$$

En présence de l'écoulement de vitesse $u \ll c$, la pulsation est

$$\omega_{//} = kv_{//} = k \left[v_{\varphi} + \frac{u}{c} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) \right],$$

pour les ondes lumineuses de même sens que l'écoulement et

$$\omega_{a//} = kv_{a//} = k \left[v_{\varphi} - \frac{u}{c} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) \right],$$

pour les ondes de sens contraire. Deux modes sont ainsi amplifiés dont l'écart en fréquence est

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{ku}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right),$$

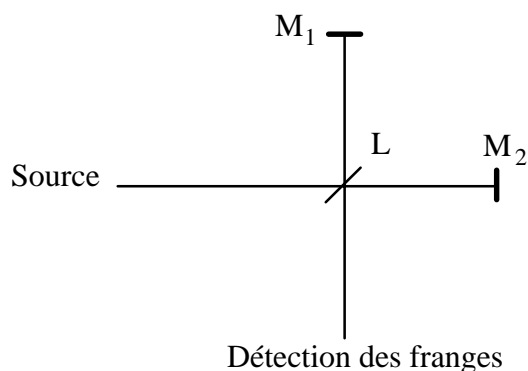
proportionnel à la vitesse u .

La sensibilité de ces techniques a permis d'étendre l'expérience à des jets de gaz ou à des solides en mouvement (W.M. Macek, J.R. Schneider and R.M. Salamon, *J. of Appl. Phys.*, **35**-1964-2556).

17. Cent ans de tables tournantes: l'expérience de Michelson-Morley.

La grande majorité des observations et des expériences décrites au chapitre premier, sont largement postérieures à la publication par Einstein de la théorie de la relativité restreinte. Sur quoi étaient donc basées les réflexions des physiciens de la charnière entre le XIX^{ème} et le XX^{ème} siècle? Ils avaient eu deux sujets de méditation: l'incompatibilité apparente entre les équations de Maxwell et les principes de la mécanique d'une part, et d'autre part les résultats désespérément négatifs d'une expérience de composition des vitesses impliquant la lumière. Cette expérience réalisée pour la première fois par Michelson et Morley en 1887 après une première tentative du seul Michelson en 1881, puis répétée de nombreuses fois, a une grande importance historique.

L'idée était de mettre en évidence la composition de la vitesse des ondes lumineuses ($3 \cdot 10^5$ km/s.) et de celle (déjà respectable de 30 km/s) du mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil. Pour cela il fallait comparer les temps que la lumière met pour parcourir des longueurs égales dans deux directions: l'une parallèle à celle du mouvement et l'autre, orthogonale à celui-ci. L'interféromètre de Michelson est bien adapté à cette entreprise. Le faisceau lumineux émis par une source est séparé, au moyen d'une lame L, en deux faisceaux orthogonaux qui après réflexion sur deux miroirs M_1 et M_2 reviennent sur la lame qui reconstitue un faisceau unique. Un léger déplacement angulaire de l'un des miroirs conduit les deux faisceaux, recombinaison après le deuxième passage par L, à donner naissance à des interférences. Les deux bras LM_1 et LM_2 sont d'égale longueur.



Direction du mouvement de l'appareil →

Figure III-4.

Schéma de principe de l'expérience de Michelson-Morley.

Il résulte de l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel, que pour tout mouvement de l'interféromètre, et quelle que soit l'orientation des bras, le trajet aller et retour suivant LM_1 ou LM_2 prend exactement le même temps. La figure d'interférence n'est pas affectée par le mouvement ni par l'orientation de l'appareil.

Effectuant l'expérience à midi ou à minuit, ce qui permet d'avoir un des bras parallèle au mouvement orbital de la Terre, on fait tourner le support afin de mettre alternativement le bras LM_1 puis le bras LM_2 dans le sens de ce mouvement.

Cette expérience a été souvent répétée depuis 1887, avec diverses améliorations pour en accroître la sensibilité (C.F. la revue de R.S. Shankland, S.W. McCuskey, F.C. Leone & G. Kuerti, *Rev. Mod. Phys.* **27**-1955-167). Depuis 1963, on utilise des masers (T.S. Jaseja, A. Javan, J. Murray, and C. Townes, *Phys. Rev.* **133**-1964-A1221) ou des lasers (A. Brillet & J.L. Hall, *Phys. Rev. Lett.* **42** —1978— 549): disposant de deux sources identiques, on en place une le long de chaque bras et on cherche à mettre en évidence des écarts en fréquence.

Aucun effet attribuable au mouvement orbital de la Terre, encore moins au mouvement du système solaire par rapport au bruit de fond cosmique (400 km/s), n'a pu être observé en cent ans d'expériences à la Michelson-Morley.