

IV

Optique

18. Le quadrivecteur fréquence-vecteur d'onde.

Il est courant de représenter la lumière sous la forme idéalisée d'une onde plane monochromatique. La phase de cette onde plane est une grandeur sans dimensions invariante par changement de référentiel. Elle est en effet "mesurée" par 2π fois le nombre de périodes qui ont défilé devant un observateur à partir d'un instant zéro. Cette simple opération de comptage ne dépend pas du référentiel où elle a lieu. Etant donnés les deux référentiels R et R' , l'invariance de la phase se traduit par les égalités.

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' = \phi = \text{cte.}$$

Admettons que R' ait par rapport à R un mouvement de translation uniforme de vitesse u suivant Ox . Choisissons une direction de propagation des ondes (\mathbf{k}) parallèle à l'axe des x commun aux deux référentiels. Dans ces conditions :

$$\phi = \omega t - kx = \omega' t' - k' x'$$

La transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma(-\beta x + ct) \end{aligned}$$

permet la substitution :

$$\omega t - kx = \omega' \frac{\gamma}{c} (-\beta x + ct) - k' \gamma (x - \beta ct) = \gamma (\omega' + \beta ck') t - \gamma \left(\frac{\omega'}{c} \beta + k' \right) x .$$

En identifiant terme à terme il vient :

$$\begin{aligned} ck &= \gamma (ck' + \beta \omega') \\ \omega &= \gamma (\beta ck' + \omega') \end{aligned}$$

ce qui montre que $c\mathbf{k}$ et ω obéissent à la transformation de Lorentz et forment un quadrivecteur. Ce résultat est indépendant de la nature de l'onde. Il entraîne

$$\frac{\omega}{ck} = \frac{\omega' + \beta ck'}{ck' + \beta \omega'}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\frac{\omega'}{k'} + u}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{\omega'}{k'}}$$

La vitesse de phase se transforme par la règle relativiste de composition des vitesses.

Dans le cas de la propagation d'une onde électromagnétique, les champs électrique et magnétique obéissent aux équations de Maxwell. Ecrivons parmi celles-ci les deux qui nous sont immédiatement utiles

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

et qui se combinent pour donner naissance à l'équation de propagation

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + c^2 \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) + \mu_0 c^2 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \nabla^2 \mathbf{E} + c^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mu_0 c^2 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0.$$

Dans le vide ($\mathbf{j} = 0$), et pour un champ transverse ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$) sinusoïdal $\mathbf{E} = e^{i\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, l'équation de propagation se réduit à

$$(-\omega^2 + c^2 k^2) \mathbf{E} = 0.$$

La condition pour éviter la solution triviale fournit

$$\omega^2 - c^2 k^2 = 0,$$

relation de dispersion qui montre en même temps que la norme invariante est nulle: quadrivecteur du genre lumière.

19. Effets Doppler longitudinal et transversal.

Soit maintenant une onde électromagnétique plane qui se propage dans une direction faisant un angle θ avec celle de l'axe des x:

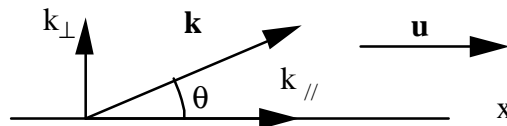


Figure IV-1.

Le vecteur d'onde \mathbf{k} , suivant Ox , a une composante: $k_{//} = k \cos \theta$, et dans le sens transversal: $k_{\perp} = k \sin \theta$.

La phase invariante est

$$\phi = \omega t - k_{//}x - k_{\perp}y = \omega' t' - k'_{//}x' - k'_{\perp}y'.$$

La transformation de Lorentz pour le quadrivecteur \mathbf{x}, ct permet d'obtenir celle qui concerne \mathbf{k}, ω sous la forme :

$$\begin{aligned} c k'_{//} &= \gamma (c k_{//} - \beta \omega) \\ \omega' &= \gamma (-\beta c k_{//} + \omega). \end{aligned}$$

Cette dernière équation est aussi :

$$(19-1) \quad \omega' = \gamma (\omega - \beta c k \cos \theta) = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta)$$

puisque dans le vide $\omega = ck$. On a ainsi obtenu la formule de l'effet Doppler relativiste qui diffère de celle de l'effet Doppler ordinaire par le facteur γ .

Il est remarquable de constater que pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, il existe, grâce à ce même facteur, un effet du second ordre en $\frac{u}{c}$: **effet Doppler transversal**.

L'**effet Doppler longitudinal** correspond à $\theta = 0$. On trouve alors :

$$(19-2) \quad \omega' = \gamma \omega (1 - \beta) = \omega \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

20. Effet Doppler et dilatation du temps.

Une autre façon d'obtenir la relation (24-2) consiste à examiner l'émission lumineuse d'une horloge atomique (standard de fréquence très précis) en mouvement: une telle horloge émet des ondes de période nominale T_0 (celle des tables) mesurée dans le référentiel où cette source est au repos.

Lorsque l'horloge est transportée jusqu'en x_0 à la vitesse u , le temps propre écoulé s'exprime en fonction de T_0 par

On a bien retrouvé la formule de l'effet Doppler longitudinal.

Imaginons que la source revienne vers l'origine à partir de x_0 toujours à la même vitesse u . L'origine est atteinte au temps $t_A=2t_0$ dans R et:

$$c(t_A - t_S) = \gamma(1 - \beta) ct'_0.$$

Pendant ce temps, on a reçu dans R le même nombre n de périodes avec la pulsation apparente:

$$\Omega = \frac{2\pi n}{t_A - t_S} = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta)} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Entre le départ et l'arrivée de l'horloge, l'observateur a compté dans R le nombre exact de périodes: $2n$, émises dans les référentiels R' où l'horloge est au repos. Ceci constitue une "mesure" à distance de l'intervalle de temps propre de la source entre le départ et l'arrivée (croisement des deux lignes d'univers). Supposons qu'une source identique soit restée au repos dans R . Elle a émis, pendant l'intervalle de temps t_A , un nombre de périodes $2n_A$ tel que:

$$2n_A = \frac{\omega_0 t_A}{2\pi} = \frac{\omega_0 t_0}{\pi} = \frac{\gamma \omega_0 t'_0}{\pi} = 2\gamma n.$$

Cet exemple montre l'étroite parenté entre l'effet Doppler relativiste et la dilatation du temps.

21. L'aberration des étoiles.

Lors d'un changement de référentiel d'inertie, la règle de composition des vitesses laisse naturellement invariante la vitesse c de la lumière dans le vide. Mais, la direction de propagation de la lumière est différente dans différents référentiels d'inertie. Pour préciser cet effet, prenons de la lumière dont la direction de propagation, dans le plan xOy du référentiel R , fait un angle $\theta+\pi$ avec l'axe des x .

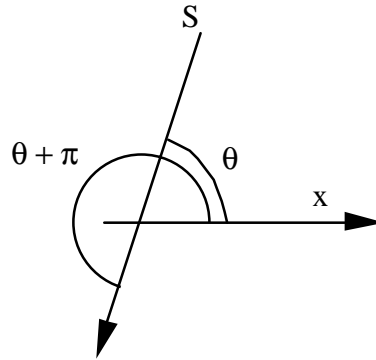


Figure IV-3.

Dans un référentiel R' en mouvement de translation uniforme avec la vitesse u suivant Ox , la direction de propagation fait, avec cet axe, l'angle $\theta'+\pi$. Les composantes de la vitesse de cette lumière dans R sont

$$v_x = -c \cos\theta$$

$$v_y = -c \sin\theta.$$

Dans R' , on a

$$v'_x = -c \cos\theta' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} = c \frac{-\cos\theta - \beta}{1 + \beta \cos\theta}$$

$$v'_\perp = -c \sin\theta' = \frac{v_\perp}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} = c \frac{-\sin\theta}{\gamma(1 + \beta \cos\theta)}.$$

d'où la relation entre les angles θ' et θ

$$(21-1) \quad \text{tg}\theta' = \frac{v'_\perp}{v'_x} = \frac{\sin\theta}{\gamma(\beta + \cos\theta)}.$$

Cette formule s'applique à l'observation des étoiles. Ces astres sont situés très au delà du système solaire. Sources lumineuses lointaines, auxquelles on attribue une quasi immobilité, ils envoient vers nous du rayonnement dont la direction d'émission apparaît modifiée par le mouvement orbital de la Terre. θ' est l'angle de visée et soit

$$\alpha = \theta - \theta'$$

l'écart angulaire que l'ordre de grandeur de la vitesse de déplacement de la Terre ($3 \cdot 10^4$ m/s, $\frac{u}{c} \sim 10^{-4}$) nous autorise à considérer comme petit. Alors

$$\text{tg}\theta' = \frac{\sin\theta - \alpha \cos\theta}{\cos\theta + \alpha \sin\theta}$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \frac{\sin\theta [\beta\gamma + (\gamma-1)\cos\theta]}{1 + \beta\gamma \cos\theta + (\gamma-1)\cos^2\theta} - \frac{\beta\gamma \sin\theta}{1 + \beta\gamma \cos\theta},$$

le terme $(\gamma-1)$ étant d'ordre 2 en β . Dans la limite des β très faibles

$$\alpha \sim \beta\gamma \sin\theta \sim \beta \sin\theta .$$

Lorsqu'à partir de la Terre, on pointe une étoile au moyen d'un télescope, l'angle de visée fait avec la direction réelle, un écart α proportionnel à la vitesse orbitale autour du Soleil.

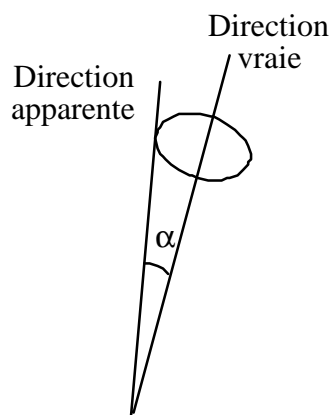


Figure IV-4.

Au cours de l'année, α (qui d'après la formule précédente peut atteindre 20 secondes d'arc ce qui est parfaitement mesurable) reste constant mais la direction du mouvement orbital fait un tour complet. Il en va de même de l'orientation du télescope autour de la direction réelle de l'astre. Ce phénomène appelé aberration des étoiles "fixes" a été découvert par Bradley en 1727 et n'avait pas reçu d'explication satisfaisante avant l'apparition de la théorie de la relativité.

27. Effets du mouvement de la source sur la direction de la lumière émise et sur l'apparence des objets.

Reprenons le problème du § précédent: une source au repos dans le référentiel R émet de la lumière dont la direction de propagation dans le plan xOy , fait un angle $\theta+\pi$ avec l'axe des x . Pour un observateur au repos dans un référentiel R' en mouvement de translation uniforme par rapport à R avec la vitesse u suivant Ox , la direction de propagation fait avec cet axe, l'angle $\theta'+\pi$. Nous avons établi la formule (26-1) qui relie les angles θ et θ'

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{v'_{\perp}}{v'_x} = \frac{\sin \theta}{\gamma(\beta + \cos \theta)}.$$

Cette relation montre que θ' est toujours inférieur à θ . En effet si par exemple $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} \theta' = \frac{1}{\beta\gamma}$, valeur finie et petite si γ est grand. De même $\operatorname{tg} \theta'$ diverge ($\theta' = \frac{\pi}{2}$) lorsque $\cos \theta = -\beta$.

Beaucoup de sources émettent uniquement dans un demi espace: $-\frac{\pi}{2} < (\pi - \theta) < \frac{\pi}{2}$. Un tel objet présente pour l'observateur en mouvement vers la source, un lobe d'émission plus resserré dont le demi angle d'ouverture au sommet est $\operatorname{Arctg}(\frac{1}{\beta\gamma})$ ($\sim \frac{1}{\beta\gamma}$ aux plus grandes vitesses). L'effet est le même pour un observateur fixe, par rapport auquel une source se déplace à grande vitesse.

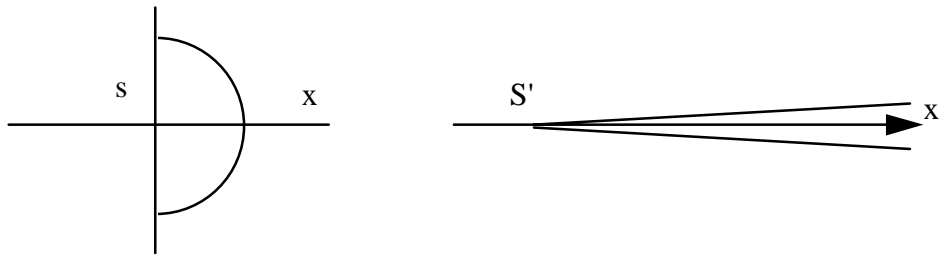


Figure IV-5.

A partir de la relation (26-1), on montre que, contrairement à une image naïve (mais fort répandue) la contraction de Fitzgerald-Lorentz ne se manifeste pas visuellement par une réduction des longueurs dans le seul sens du mouvement. La forme et les proportions du contour d'un objet en déplacement rapide ne sont pas modifiés pour un observateur fixe, mais l'angle solide sous lequel est vu cet objet a diminué (J. Terrel, *Physical Review*, **116** —1959— 1041).

Comparons en effet les éléments d'angle solide à un instant donné tel que les origines de R et R' coïncident au point d'observation. En coordonnées sphériques on a les schémas de la figure IV-6.

Les angles φ et φ' ne sont pas affectés par le mouvement: $\varphi = \varphi'$. Mais

$$\begin{aligned} d\Omega &= R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi / R^2 = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ d\Omega' &= \sin \theta' \, d\theta' \, d\varphi' \end{aligned}$$

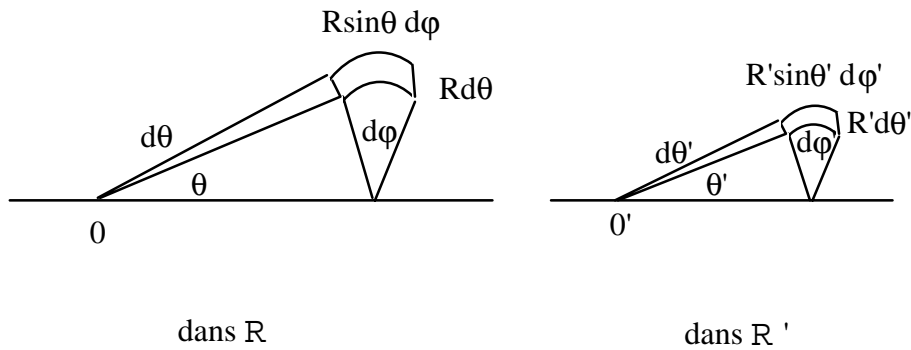


Figure IV-6.

Or, dérivant la relation donnant $\cos\theta'$ en fonction de θ , il vient :

$$\sin\theta' d\theta' = \frac{\sin\theta d\theta}{1 + \beta \cos\theta} - \frac{\beta (\beta + \cos\theta) \sin\theta d\theta}{(1 + \beta \cos\theta)^2} = \frac{\sin\theta d\theta}{\gamma^2 (1 + \beta \cos\theta)^2} = \frac{\sin^2\theta' d\theta}{\sin\theta}$$

Finalement on obtient:

$$\frac{d\theta}{d\theta'} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'}$$

Il en résulte que les arcs de longueur $R'd\theta'$ et $R'\sin\theta'd\phi'$ varient dans les mêmes proportions. Ainsi pour un voyageur spatial dont la fusée se déplace à une vitesse proche de c , les constellations gardent leur apparence mais à l'intérieur d'un angle solide différent. Elles semblent s'accumuler autour du point visé par la direction du mouvement.

S'agissant d'objets étendus proches en mouvement rapide, le problème est en général plus compliqué. Par exemple, un cube sera toujours vu comme un cube, mais sous différents angles selon la vitesse relative entre l'observateur et cet objet.

Autre exemple: dans les mêmes conditions, une sphère sera toujours vue avec un contour circulaire, quel que soit l'angle de visée. Le diamètre apparent subira cependant une réduction par un facteur

$$\frac{1}{\gamma^2 (1 + \beta \cos\theta)^2},$$

tandis que les méridiens et les parallèles tracés sur la surface apparaîtront déformés.