V

Masse et Energie

Les lois de la mécanique non relativiste expriment des principes de conservation. En particulier la relation fondamentale de la dynamique tire son origine d'un fait expérimental: pour un système isolé de toute influence extérieure, la somme (vectorielle) des produits des masses des différents objets du système par leurs vitesses, est une constante. Ce produit de la masse par la vitesse est appelé impulsion ou quantité de mouvement.

Dans le passage à la mécanique relativiste, on va garder le principe de la conservation de l'impulsion pour un système isolé ainsi que la définition de la force qui en découle: on appelle force tout ce qui, appliqué à un objet matériel, modifie son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme (Newton). Il n'y a pas de raison particulière d'abandonner ce principe qui, de plus, doit être vérifié dans la limite des vitesses petites devant c. L'ensemble des conséquences obtenues et leur accord avec l'expérience justifient ce point de vue.

23. Les variations de la masse inerte.

Imaginons une collisions frontale entre deux objets identiques ayant dans le référentiel R_0 des vitesses opposées. On suppose que cette collision est *élastique*, c'est à dire que l'énergie cinétique et l'impulsion totales sont conservées. Avant le choc, les composantes des vitesses sont:

$$u_1 \quad \text{et} \quad v_1, \qquad\qquad u_2 = - u_1 \quad \text{et} \quad v_2 = - v_1.$$

Après le choc on a:

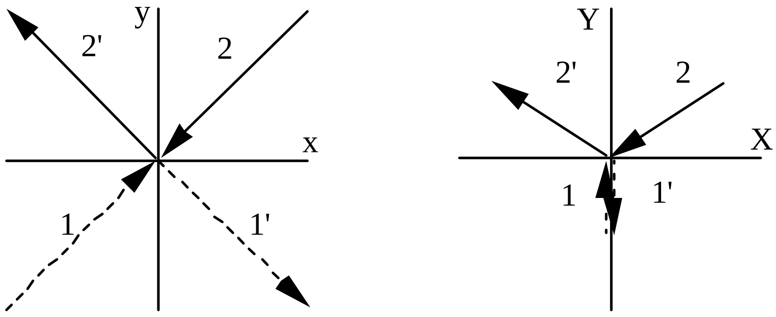
$$u_1' = u_1 \;\text{ et }\; v_1' = - v_1, u_2' = - u_1 \;\text{ et }\; v_2' = - v_2 = v_1.$$

Dans un référentiel R qui se déplace par rapport à R_0 avec la vitesse u_1 suivant Ox, les composantes des vitesses sont avant choc:

$$U_1 \;\text{ et }\; V_1, \qquad U_2 \;\text{ et }\; V_2$$

après choc :

$$U_1' \;\text{ et }\; V_1', \qquad U_2' \;\text{ et }\; V_2' .$$



dans R_0 *dans* R

Figure V-1.

Les composantes U et V se calculent à partir de u et v à l'aide de la loi de composition des vitesses:

$$U = \frac{u - u_1}{1 - \frac{uu_1}{c^2}}, \qquad V = \frac{v}{\gamma_1}\frac{1}{1 - \frac{uu_1}{c^2}}, \qquad \text{avec} \qquad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}.$$

Ainsi:

$$U_1' = U_1 = 0, \qquad V_1' = - V_1\,, \qquad U_2' = U_2\,, \qquad V_2' = - V_2\,,$$

$$U_2 = \frac{u_2 - u_1}{1 - \frac{u_2u_1}{c^2}} = - \frac{2u_1}{1 + \frac{u_1^2}{c^2}}, \quad V_1 = \frac{v_1}{\gamma_1}\frac{1}{1 - \frac{u_1^2}{c^2}} = v_1\gamma_1\,, \quad V_2 = \frac{v_2}{\gamma_1}\frac{1}{1 - \frac{u_2u_1}{c^2}} = - \frac{v_1}{\gamma_1}\frac{1}{1 + \frac{u_1^2}{c^2}}.$$

En passant de R_0 à R, la composante suivant OY de la quantité de mouvement totale reste nulle. Or,

$$V_1 + V_2 = \frac{v_1}{\gamma_1}\frac{1}{1 - \frac{u_1^2}{c^2}} - \frac{v_1}{\gamma_1}\frac{1}{1 + \frac{u_1^2}{c^2}} \neq 0,$$

ne l'est pas. Pour sortir de cette impasse, il faut admettre que les masses respectives M_1 et M_2 des objets 1 et 2 ne peuvent être identiques dans R. Alors,

$$|M_1V_1| = \frac{M_1v_1}{\gamma_1}\frac{1}{1 - \frac{u_1^2}{c^2}} = |M_2V_2| = \frac{M_2v_1}{\gamma_1}\frac{1}{1 + \frac{u_1^2}{c^2}},$$

entraine:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{1 + \frac{u_1^2}{c^2}}{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}.$$

Dans R, les normes des vitesses des deux objets sont:

$$U_1^2 + V_1^2 = V_1^2 = v_1^2\gamma_1^2$$

$$U_2^2 + V_2^2 = \frac{4u_1^2 + v_1^2\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2} = \frac{4u_1^2 + V_1^2\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2} .$$

La dernière relation peut s'écrire:

$$\frac{U_2^2 + V_2^2}{c^2}\left(1 + \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2 = 4\frac{u_1^2}{c^2} + \frac{V_1^2}{c^2}\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2 = \left(1 + \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2 + \frac{V_1^2}{c^2}\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2 .$$

de sorte que:

$$\frac{\left(1 + \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{V_1^2}{c^2}}{1 - \frac{U_2^2+V_2^2}{c^2}} = \frac{\Gamma_2^2}{\Gamma_1^2} ,$$

où l'on a posé:

$$\Gamma_1^2 = \frac{1}{1 - \frac{V_1^2}{c^2}} , \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2^2 = \frac{1}{1 - \frac{U_2^2+V_2^2}{c^2}} .$$

On trouve ainsi:

$$\frac{M_2}{\Gamma_2} = \frac{M_1}{\Gamma_1} = M(\Gamma=1) = m_0 ,$$

où m_0 est évidemment la masse au repos de l'un ou l'autre des objets identiques 1 et 2.

Le raisonnement que nous venons de faire sur un exemple simple, montre que la masse d'un objet dépend de sa vitesse v dans un référentiel donné. D'une façon générale, m_0 étant la masse au repos,

$$\text{(23-1)} \qquad m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

La masse tend vers l'infini lorsque la vitesse tend vers la vitesse c de la lumière dans le vide. C'est une raison supplémentaire pour affirmer que c est la limite supérieure assignée à la vitesse de tout objet matériel, ce qui est conforme à la fois à l'expérience et aux conséquences déjà formulées de la transformation de Lorentz.

24. Dynamique.

La relation fondamentale garde la forme que lui a donné Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (24\text{-}1)$$

valable dans tout référentiel d'inertie. La masse étant variable, c'est aussi:

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\,\frac{dm}{dt} \qquad (24\text{-}2)$$

qui montre qu'en général, force et accélération ne sont pas colinéaires. **F**, m, **v** et t n'ont aucun caractère absolu et dépendent tous du référentiel d'inertie considéré.

Aux faibles vitesses, c'est à dire pour v<<c lorsque les variations de la masse sont négligeables, on retrouve la formulation habituelle.

γ étant fonction de la vitesse, les 3 équations du mouvement obtenues après projections sur les axes, suffisent à la dynamique relativiste. Mais cette mécanique concerne un espace-temps à quatre dimensions. Par souci d'établir une formulation cohérente avec les quatre dimensions de l'espace-temps, on fait souvent intervenir une quatrième relation décrivant la variation de la masse (ou de γ). Nous verrons dans la suite comment apparaît l'équation correspondante.

25. Travail d'une force.

Le travail élémentaire d'une force s'exprime, comme en mécanique non relativiste par le produit scalaire de la force par le déplacement élémentaire:

$$d\mathcal{T} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\, dt.$$

Reprenant l'expression (24-2) de **F** en fonction de l'accélération et de la variation de la masse:

$$d\mathcal{T} = m\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v} + |v|^2 dm.$$

Or la variation de la masse est donnée par (23-1) soit

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

ce qui entraîne:

$$dm = \frac{m_0 v dv}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} .$$

Substituant dans le travail élémentaire:

$$dT = \frac{m_0 \mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_0 v^2 \mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{m_0 \mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} .$$

Lorsque le point d'application de la force se déplace d'une position $\mathbf{r}_1$ (vitesse $\mathbf{v}_1$) à une position $\mathbf{r}_2$ (vitesse $\mathbf{v}_2$)

$$\Delta T\ (\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2) = m_0 \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} \frac{\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \right).$$

En mécanique non relativiste, le travail de la force est égal à la variation d'énergie cinétique. En mécanique relativiste, on trouve que le travail est égal à la variation de

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

grandeur qui, comme nous allons le voir au § suivant, **n'est pas l'énergie cinétique**.

Notons enfin que la relation de définition du travail élémentaire fournit une quatrième équation pour la dynamique relativiste. On écrit en effet

$$\text{(25-1)} \qquad \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = \frac{dT}{dt} = m_0 c^2 \frac{d\gamma}{dt} .$$

26. Energie cinétique, équivalence masse énergie.

Le travail élémentaire vient d'être calculé en termes de variation de vitesse. Compte tenu de la relation entre masse et vitesse on peut aussi écrire :

$$dT = c^2\, dm = m_0 c^2\, d\gamma .$$

Par intégration à partir du repos (vitesse nulle, $\gamma = 1$)

$$\text{(26-1)} \qquad \Delta T = (\gamma - 1)\, m_0 c^2$$

Cette expression incite à considérer que ΔT est égal à l'**énergie cinétique** E_C acquise par un objet de masse au repos m_0 lorsqu'il est mis en mouvement et atteint la vitesse v. Alors

$$(26\text{-}2) \qquad \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 c^2 = mc^2 ,$$

est par définition l'**énergie totale,** composée de l'énergie cinétique (26-1) et de l'énergie équivalente à la masse au repos :

$$(26\text{-}3) \qquad E_0 = m_0 c^2.$$

D'une façon générale, on a pour l'énergie totale d'un objet matériel:

$$\boxed{(26\text{-}4) \qquad E = mc^2}$$

où $m=\gamma m_0$, formule valable quel que soit l'état de repos ou de mouvement de l'objet massif.

Pour obtenir l'équation la plus célèbre de la physique, à laquelle le nom d'Einstein est indissolublement attaché, on a étendu la conservation de l'impulsion à la dynamique relativiste, puis analysé le travail d'une force en termes d'énergie. Il convient à ce stade de vérifier le caractère raisonnable du résultat obtenu.

Dans la limite des faibles vitesses, il doit se confondre avec le résultat de la mécanique non relativiste. Or pour $\left(\beta = \frac{v}{c} << 1\right)$, on développe γ en se limitant à l'ordre 2 en $\frac{v}{c}$ soit :

$$(26\text{-}5) \qquad E = \gamma m_0\, c^2 = m_0\, c^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots\right) - m_0\, c^2 + \frac{m_0\, v^2}{2} .$$

On trouve ainsi en première approximation la somme de l'énergie au repos et de l'énergie cinétique habituelle. Dans ces conditions le travail de la force entre deux positions est

$$\Delta T \left(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2\right) - \frac{m_0 v_2^2}{2} - \frac{m_0 v_1^2}{2}.$$

On a bien obtenu l'égalité entre la variation d'énergie cinétique et le travail de la force, énoncée dans le cadre de la mécanique non relativiste.

Dans l'expression de la masse γm_0c^2, γ dépend du mouvement, tandis que m_0c^2 est une grandeur invariante. On restreint souvent l'emploi du mot masse (et du concept) à cet invariant. C'est en particulier l'usage adopté par les physiciens des particules.

La relation d'Einstein (33-4) établit une équivalence entre masse et énergie. On est donc conduit à admettre que de la masse peut se transformer en énergie et vice versa. On vérifie tous les jours qu'il en est bien ainsi. Les réactions nucléaires, celle des réacteurs à fission comme celles du soleil et des autres étoiles, les expériences faites sur les particules élémentaires au moyen des grands accélérateurs, sont là pour nous le prouver: le bilan des masses (au repos) entre partenaires et produits de la réaction donne grâce à (26-4) la valeur de l'énergie libérée ou absorbée.

Ainsi, dans les recueils de données, les masses au repos des particules atomiques et subatomiques sont écrites en unités d'énergie et non de masse. Le tableau suivant V-1 montre quelques exemples.

Le développement limité (26-5) que nous avons utilisé pour les vitesses les plus faibles permet aussi de fixer une limite au domaine d'application de la mécanique non relativiste. Le terme d'ordre β^4 représente l'erreur commise en assimilant l'énergie cinétique relativiste à $\frac{m_0v^2}{2}$.

Tableau V-1

Particule	*Symbole*	*Masse* (M.e.V.)	*Temps de décroissance* (s.)[1]
Electron	$e^{\pm}$	0.511	
Muon	μ	105.7	$2.2\ 10^{-6}$
Pion chargé	$\pi^{\pm}$	139.6	$2.6\ 10^{-8}$
Pion neutre	π_0	135	$0.87\ 10^{-16}$
Proton	p	938.3	?
Neutron	n	939.6	898

En valeur relative

$$\frac{2\Delta E}{m_0v^2} = \frac{3}{4}\beta^2.$$

Fixant à 1% l'écart tolérable on arrive à la condition

$$\beta^2 \leq \frac{4}{3}10^{-2} \quad \text{ou} \quad \beta \leq \frac{0.2}{\sqrt{3}} \approx 0.12$$

[1] Temps au bout duquel la population des particules est une fraction 1/2 de celle existant à un instant zéro.

A la limite (signe =), le rapport de l'énergie cinétique à la masse au repos est

$$\frac{\beta^2}{2} = \frac{2}{3}\,10^{-2}.$$

On trouve ainsi que la mécanique newtonnienne est applicable jusqu'à des énergies cinétiques de

7 M.e.V.	pour les protons
3 K.e.V.	pour les électrons.

Cette limite est, pour les électrons, assez basse. Elle est aisément franchie dans le cas d'objets d'usage courant. Ainsi, pour calculer à mieux que 1% les trajectoires des électrons, accélérés à 15 K.e.V. (1 K.e.V. = 10^3 e.V.), d'un tube de télévision à "coins carrés", il convient de tenir compte de la relativité.

27. Le quadrivecteur impulsion-énergie.

L'énergie totale d'un objet massif (énergie cinétique augmentée de l'équivalent de la masse au repos) est:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 c^2 = mc^2 \;.$$

Elevant au carré on obtient:

$$\frac{m_0^2\, c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2\, c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2\, c^4 + \frac{m_0^2\, c^2\, v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$
$$= m_0^2\, c^4 + \gamma^2 m_0^2\, c^2\, v^2 = m_0^2\, c^4 + p^2\, c^2 = m^2\, c^4 \;.$$

La dernière égalité, recopiée

$$\boxed{(27\text{-}1) \qquad E^2 - p^2c^2 = m_0{}^2c^4,}$$

est une relation d'une extrême importance entre l'énergie et la quantité de mouvement d'un objet massif. On remarque au passage qu'elle rend compte du résultat expérimental décrit au § 3 (premier chapitre).

Elle est de même forme que la relation d'invariance d'un quadrivecteur. Il convient donc de vérifier que lors d'un changement de référentiel d'inertie, E et pc se transforment bien par les formules de Lorentz.

Soit v la vitesse suivant Ox dans un certain référentiel d'espace-temps R. Dans un autre référentiel R' qui se déplace par rapport au premier avec la vitesse u également suivant Ox,

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \gamma_{v'} m_0 \ ,$$

avec, d'après la loi de composition des vitesses:

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}} \ .$$

Utilisant la relation (13-2):

$$\gamma_{v'} = \gamma_v \gamma_u \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)$$

il vient

$$m' = m_0 \gamma_v \gamma_u \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) .$$

Dans ces conditions:

$$m'c^2 = \gamma_u \left(- \gamma_v m_0 uv + \gamma_v m_0 c^2\right) = \gamma_u \left(- \beta_u pc + mc^2\right) ,$$

tandis que:

$$p'c = m'v'c = m_0 \gamma_v \gamma_u \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) \frac{c\,(v - u)}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \gamma_u \left(\gamma_v m_0 vc - \gamma_v m_0 uc\right) = \gamma_u \left(pc - \beta_u mc^2\right) .$$

Ainsi (pc, mc^2) obéit à la transformation de Lorentz lors d'un changement de référentiel. Quantité de mouvement (impulsion), multipliée par c, et énergie forment donc un quadrivecteur de norme invariante :

$$m^2c^4 - p^2c^2 = m_0{}^2c^4.$$

Dans un diagramme mc^2 (énergie), pc (impulsion), l'impulsion-énergie d'un objet matériel en mouvement est représentée par un point de l'arc d'hyperbole dont l'équation est la relation précédente (Figure V-2).

Pour cet objet en mouvement à la vitesse v, on a:

$$\frac{pc}{mc^2} = \frac{v}{c} = \beta_v < 1 \ .$$

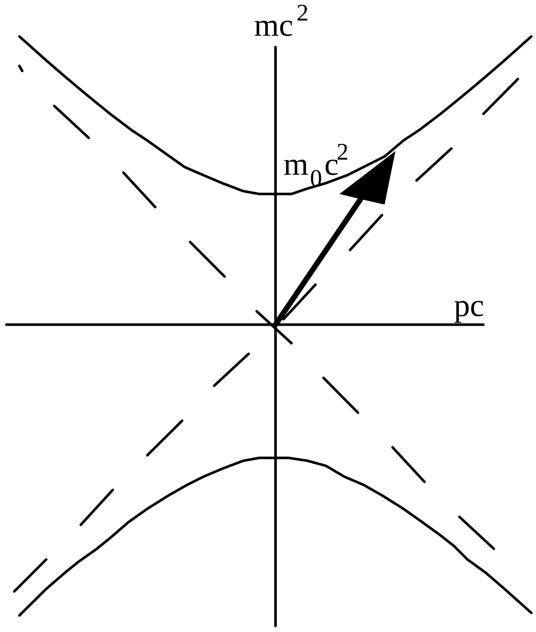


Figure V-2.

Quadrivecteur impulsion-énergie.

Il existe une façon plus directe d'obtenir le quadrivecteur impulsion énergie à partir de la quadrivitesse ($\gamma_v\mathbf{v}$,γ_vc). Multipliant chaque composante par m_0c, il vient immédiatement :

$$\gamma_V m_0 \mathbf{v} c = \mathbf{p} c$$
$$\gamma_V m_0 c^2 = mc^2 \ .$$

28. Transformation de la force.

Selon la deuxième loi de Newton (relation fondamentale de la dynamique), la force est la dérivée par rapport au temps du vecteur impulsion de la même façon que la vitesse est la dérivée par rapport au temps du vecteur position. On peut donc procéder comme pour les vitesses, par différenciation de la transformation de Lorentz appliquée cette fois aux deux quadrivecteurs position-temps et impulsion-énergie.

position-temps	*impulsion-énergie*
$dx' = \gamma\,(dx - \beta cdt)$	$cdp'_{x'} = \gamma\,(cdp_x - \beta dE)$
$dy' = dy$	$cdp'_{y'} = cdp_y$
$dz' = dz$	$cdp'_{z'} = cdp_z$
$cdt' = \gamma\,(- \beta dx + cdt)$	$dE' = \gamma\,(- \beta cdp_x + dE)$.

On va trouver ainsi une transformation de même forme que celle qui concerne les vitesses. Ce n'est donc pas la transformation de Lorentz.

La force n'est pas un quadrivecteur. Mais de même qu'on a introduit la quadrivitesse, on peut construire un quadrivecteur incluant la force à partir de la relation de la dynamique écrite en quatre équations. On a en effet:

$$c\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}c}{dt} \;,$$
$$\mathbf{F}\cdot\,\mathbf{v} = \frac{dmc^2}{dt}\;.$$

Une autre écriture est

$$\gamma_v c\mathbf{F} = \gamma_v\frac{d\mathbf{p}c}{dt} = \frac{d\mathbf{p}c}{dt_0}\,,$$
$$\mathbf{F}\cdot\,\gamma_v\mathbf{v} = \gamma_v\frac{dmc^2}{dt} = \frac{dmc^2}{dt_0}\,, \qquad (28\text{-}1)$$

où t_0 est le temps propre. Généralisant la loi de Newton, les équations (34-1) font intervenir un quadrivecteur force-travail ($\gamma_v\mathbf{F}c$, $\gamma_v\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$) égal à la dérivée du quadrivecteur impulsion-énergie par rapport au temps propre.