Electromagnétisme et optique

Corrigé du Contrôle Continu n° 1

Jeudi 2 novembre 2000

1. Préliminaires

1.1 *(2.5 points)* Le potentiel en tout point P de l'espace s'écrit : $V(\mathrm{P}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{Q}{\mathrm{AP}} - \dfrac{q}{\mathrm{BP}}\right]$.

Aux points M et M' on doit avoir : V(M)=V(M')=0, soit :

Q/AM=q/BM et Q/AM'=q/BM'. Or AM=h-BM et AM'=h+BM', d'où :

BM=(hq)/(q+Q) et BM'=(hq)/(Q-q). On a de plus : BM+BM'=2a. On en déduit finalement :

$$a=(qQh)/(Q^2-q^2).$$

1.2 *(2.5 points)* d=OB=OM-BM=a-(hq)/(q+Q), d'où on tire :

$$d=(hq^2)/(Q^2-q^2).$$

2. Problème

2.1 *(3 points)* L'image de la sphère au potentiel zéro, en présence de la charge +Q en A est, d'après les préliminaires, une charge ponctuelle –q (en B) intérieure à la sphère sur l'axe (OA). On a : D=h+d et $a=(qQh)/(Q^2-q^2)$, $d=(hq^2)/(Q^2-q^2)$. On en déduit :

$$q=Qa/D \text{ et } d=a^2/D.$$

2.2 *(2 points)* Le potentiel V en un point P(r,θ) créé par le système (sphère + charge Q) est égal au potentiel créé par le système (charge –q + charge Q) : $V(\mathrm{P}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{Q}{\mathrm{AP}} - \dfrac{q}{\mathrm{BP}}\right]$.

On a $\mathrm{AP}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{AO}^2-2\mathrm{OP.AO}\cos\theta = r^2+D^2-2rD\cos\theta$

et $\mathrm{BP}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{BO}^2-2\mathrm{OP.BO}\cos\theta = r^2+d^2-2rd\cos\theta$.

En remplaçant q par sa valeur trouvée précédemment, on obtient l'expression du potentiel.

2.3 *(2 points)* Le champ **E**(P) dérive du potentiel V(P): $\mathbf{E} = -\overrightarrow{grad}\, V = -\dfrac{\partial V}{\partial r}\mathbf{u}_r - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta$. Il suffit alors de calculer les dérivées partielles, et on trouve :

$$\mathrm{E}_r(P)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{(r-D\cos\theta)\left[r^2+D^2-2\,r\,D\cos\theta\right]^{-3/2}-\frac{a}{D}(r-d\cos\theta)\left[r^2+d^2-2\,r\,d\cos\theta\right]^{-3/2}\right\}.$$

$$\mathrm{E}_\theta(P)=\frac{Q\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left\{D\left[r^2+D^2-2\,r\,D\cos\theta\right]^{-3/2}-\frac{ad}{D}\left[r^2+d^2-2\,r\,d\cos\theta\right]^{-3/2}\right\}.$$

2.4 *(3 points)* On a : $\sigma(\mathrm{S})=\varepsilon_0\mathrm{E}_r(r=a)$ et $AS^2=l^2=a^2+D^2-2aD\cos\theta$, d'où $\cos\theta=(D^2+a^2-l^2)/2aD$. D'autre part, on a : $BS^2= a^2+d^2-2ad\cos\theta$. On remplace d par sa valeur trouvée au 2.1, pour obtenir : $BS=al/D$. Finalement, on remplace dans l'expression de $E_r(r=a)$ les termes en $(\ldots)^{-3/2}$ par l^3 et BS^3, d et $\cos\theta$ par leur valeur, et on obtient l'expression de $\sigma(l)$ demandée.

2.5 *(2 points)* La force qu'exerce la charge $+Q$ sur la sphère est égale à l'opposée de la force qu'exerce la sphère sur la charge $+Q$ (principe de l'action et de la réaction puisque le système est en équilibre électrostatique):

$\mathbf{F}_{Q\rightarrow sph\grave{e}re}=-\mathbf{F}_{sph\grave{e}re\rightarrow Q}=-Q\mathbf{E}_{sph\grave{e}re}(\mathrm{A})$. *Attention* : $\mathbf{E}_{sph\grave{e}re}$ représente le champ créé par la sphère seule et non le champ total calculé précédemment. Par la méthode des images, on sait que ce champ est égal à celui créé par la charge image $-q$ située en B. D'où :

$\mathbf{F}_{Q\rightarrow sph\grave{e}re}=-\dfrac{Q(-q)}{4\pi\varepsilon_0(D-d)^2}\mathbf{u}_x$. On remplace q et d par leur valeur trouvée en 2.1, et on obtient:

$$\mathbf{F}_{Q\rightarrow sph\grave{e}re}=\frac{aDQ^2}{4\pi\varepsilon_0(D^2-a^2)}\mathbf{u}_x.$$

3. Problème bis

3.1 *(3 points)* On considère deux états d'équilibre : avant (sphère au potentiel zéro) et après (sphère isolée neutre). Donc la répartition de la charge "neutralisante" qu'on rajoute doit être uniforme pour conserver l'équilibre. La charge totale de la sphère au potentiel zéro (problème précédent) est : $Q_1=\int_{sph\grave{e}re}\sigma(l)\,dl=-q=-\dfrac{aQ}{D}$. La charge à rajouter pour que la sphère, maintenant isolée, se neutralise est donc $-Q_1=+q=aQ/D$. La distribution σ' équivaut donc, à l'extérieur de la sphère, à la charge $+q$ placée au point O (centre de la sphère) puisque la densité est uniforme. Cette charge $+q$ est l'intégrale sur tout la surface de la sphère de $\sigma' dS$, soit $4\pi a^2\sigma'$. On déduit donc $\sigma'=Q/(4\pi aD)$.

3.2 *(2 points)* En superposant les deux états d'équilibre, on a $\sigma_2(l)=\sigma(l)+\sigma'$, soit :

$$\sigma_2(l)=-\frac{Q}{4\pi al^3}(D^2-a^2)+\frac{Q}{4\pi aD}.$$

3.3 *(2 points)* Le potentiel total est la superposition du potentiel V(P) de l'état d'équilibre précédent (question 2.2) et du potentiel V'(P) créé par la densité de charge "neutralisante" σ'. Ce dernier est tout simplement le potentiel créé par la charge $+q$ placée en O : $V'(\mathrm{P})=q/(4\pi\varepsilon_0 r)=aQ/(4\pi\varepsilon_0 Dr)$. D'où finalement :

$$V_2(\mathrm{P}) = V(\mathrm{P}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{aQ}{Dr}.$$