EXERCICES PROPOSES AUX COURS

CHAPITRE 1

Exercice 1 : **Sphère métallique et méthode des images ; trouver la densité de charges sur la sphère lorsqu'elle est reliée à la terre en présence d'une charge voisine Q $\in$; cas du cours**

Lorsque la sphère est au potentiel nul , comme dans le cours , on sait exprimer la densité de charges à la surface en écrivant que :

$$\sigma(\theta) = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V(R,\theta)}{\partial R}\right|_{R=a}$$

en effet la symétrie du problème assure que si θ est l'angle entre R et r :

$$\sigma(\theta) \ = \ -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r}\frac{1-\frac{a^2}{r^2}}{\left(1+\frac{a^2}{r^2}-2\frac{a}{r}\cos(\theta)\ \right)^{3/2}}$$

L'intégrale de cette densité de surface est égale à q'

$$\int \sigma(\theta)\ \ a^2\ \ (2\pi\ \ \sin(\theta)d\theta\ ) = Q' = -\frac{a}{r}Q$$

Si on voulait calculer la force avec laquelle la charge Q est attirée par la sphère il suffit d'écrire la loi de Coulomb entre la charge Q et la charge "image" Q' , là où elle est .

Exercice 2 : **Sphère métallique et méthode des images ; même problème lorsque la sphère est isolée et qu'elle porte au départ une charge Q''**

On peut tenir le raisonnement simple suivant : on exécute d'abord les opérations données dans le cours ; la sphère porte une charge Q' ; puis on coupe la liaison avec la terre ; on ajoute alors à la sphère la charge Q''-Q' pour porter sa charge totale à Q'' ; cet ajout de charge (Q''-Q') va se distribuer uniformément sur la surface de la sphère puisque , déjà , Q et Q' sont en équilibre . On vient donc de faire que pour le un point R extérieur , par rapport à l'exercice 1 , on a seulement ajouté un potentiel de coulomb provenant d'une charge (Q''-Q') placée au centre de la sphère (théorème de Gauss) !

$$V(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q''+Q\ \ a/r}{R}$$

Exercice 3 : **Sphère métallique et méthode des images ; même problème lorsque la sphère est portée à un potentiel V'**

On tient le raisonnement suivant , par exemple : avant d'approcher Q , la sphère au potentiel V' doit porter la charge totale et uniformément répartie V'a ; on peut donc remplacer cette sphère par une charge au centre qui vaut V'a et le potentiel à l'extérieur en présence de Q sera :

$$V(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{V'\,a}{R}$$

Exercice 4 : **Sphère métallique et méthode des images** ; **sphère placée dans un champ uniforme**

Le but est de calculer la densité de charges induite sur la surface lorsque l'on place la sphère dans un champ extérieur uniforme . Pour obtenir ce résultat on va "simuler le champ extérieur par deux charges +Q et -Q placées à égales distances du centre soit +r et -r ; dans le bissecteur , par symétrie , le champ lui est effectivement perpendiculaire . Tout se passe comme si on avait 4 charges qui donnaient ce champ : les deux charges réelles et les deux charges images correspobndantes ; elles produisent en un point à une distance **R** (R , θ) un potentiel que l'on a exprimé au cours pour une charge+son image . Faisons alors tendre r vers l'infini et développons le potentiel produits par les 4 charges ; on a :

$$V(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[-\frac{2Q}{r^2}R\cos(\theta) + \frac{2Q}{r^2}\frac{a^3}{R^2}\cos(\theta) + ...]$$

dans la limite où $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{r^2}$ reste constant pour R tendant vers l'infini (on écarte les charges réelles pour simuler un champ uniforme) on vérifie que $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{r^2} = E_0$ et donc que :

$$V(\mathbf{R}) = -\ E_0\ (\ R - \frac{a^3}{R^2})\cos(\theta)$$

le premier terme est juste le potentiel d'un champ uniforme et le second est le potentiel induit par la distribution superficielle de charge où si l'on préfère par les charges images . La densité de charges de surface correspondante est :

$$\sigma(\theta) = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V(R,\theta)}{\partial R}\right|_{R=a} = 3\ \varepsilon_0 E_0\ \cos(\theta)$$

Ainsi , par cette méthode on n'a pas eu à résoudre une équation de Poisson .

Exercice 5 **Transformation de Galilée et conservation de la charge**

La physique classique est « invariante par transformation de Galilée » ; c'est un postulat . Une transformation de Galilée qui fait passer d'un système de référence (S) à un systéme (S') est telle que le centre des coordonnées de (S') se déplace dans (S) avec une vitesse uniforme **w .** Le temps est une grandeur universelle , c'est à dire qu'il est le même dans les deux systèmes . Sachant que la conservation des charges s'exprime dans (S') par :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \nabla' . \mathbf{j'} = \mathbf{0}$$

peut-on , en utilisant ce principe d'invariance en déduire l'expression de **j ?**
Le passage d'un référentiel à un autre permet d'écrire :

t'=t
r'=r-w t

par changement de variable on a donc :

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w} \, . \, \nabla$$

$$\nabla' = \nabla$$

en introduisant ces opérateurs dans l'équation de conservation valable pour (S') , en admettant que le changement de référentiel ne change pas la densité de charge ($\rho = \rho'$) et sachant que **w=cte** on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{w}.\nabla)\rho + \nabla . \mathbf{j'} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . (\mathbf{j'} + \rho \mathbf{w}) = \mathbf{0}$$

On est conduit à écrire que $(\mathbf{j'} + \rho \mathbf{w}) \equiv \mathbf{j}$. Or le choix des référentiels est arbitraire ; on peut choisir (S') de sorte que **j'=0 ;** cela implique que $\mathbf{j} \equiv \rho \mathbf{w}$.