Année 2000-01

CHAPITRE I

Electrostatique et magnétostatique; lois élémentaires ; équations de Maxwell dans le vide

Attention : ce chapitre est en principe connu des étudiants qui ont suivi un Deug dont la finalité était la physique ; quand bien même ils n'auraient pas étudié " l'électromagnétisme dans le vide " le contenu de ce texte , et l'aide des TD sont suffisants pour qu'ils prennent connaissance des résultats et des théorêmes sans avoir recours à d'autres livres

Existence de charges isolées

= exemples

L'existence de charges électriques ponctuelles , stables , est le fondement de l'électromagnétisme classique ; on les rencontre " accrochées " à des supports matériels : cheveux , chiffons , nuages interstellaires , conducteurs , ecrans .... ; elles constituent , à une échelle microscopique , atomes , molécules , noyaux ... ; on les notera q ou q_i au point $\mathbf{r}_i$. Leur existence révèle en même temps l'existence de " champs " appelés électriques . En physique moderne et des particules , la charge se conserve aussi dans toutes les interactions , au même titre que l'énergie .

= existence de champs électriques **E** ; caractères de cette grandeur vectorielle

On connait la notion de force et sa " propriété " d'être un vecteur . La relation suivante définit un champ , une fois admis l'existence de charges ; elle montre que charge et champ sont deux grandeurs physiques distinctes : on peut manipuler des charges dans un même champ ou appliquer différents champs à une même charge .
La force **F** appliquée à une charge q placée au point **M** où règne un champ **E(M)** est donnée par la relation vectorielle :

$$\mathbf{F(M)} = q\,\mathbf{E(M)}$$

Cette relation met en correspondance des grandeurs mécaniques et des grandeurs électriques . C’est une relation entre vecteurs . La charge q a un signe qui est soit positif (cation , noyau , proton ..) soit négatif (électron q=-1.6022 10^{-19} Cb , ...)

Champ créé par une charge élémentaire

Inversement , une charge q placée à l'origine des coordonnées produit un champ **E(M)** en **M ;** on révèle l’existence du champ , son intensité et sa direction en mesurant la force **F'(M) =** q’ **E(M)** que subit en **M** une charge test q'

= La formule ci dessous donne la valeur du champ électrique créé par une charge élémentaire dans le vide , isolée , placée à l'origine des coordonnées , loin de tout conducteur ; on distingue dans la formule les aspects : géométrie (symétrie dans l'espace : symétrie sphérique), milieu intermédiaire (le vide ici caractérisé par la constante physique ε_0), la charge q placée à l'origine, le point **r = M** où l'on mesure le champ électrique **E (r) .**
On retiendra que le module du champ varie comme r^{-2} ; c'est la loi élémentaire de Coulomb .

$$\mathbf{E(r)} = q\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Le rapport $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ est une “ grandeur ” qui caractérise le milieu (ici le vide) dans lequel est placée la charge q ; le facteur numérique 4π tient au choix du système d'unités . La valeur de ε_0 est , dans le système MKS : 8.854 10^(-12) farad/m (F/m) ; on prendra souvent comme approximation : $4\pi\ \varepsilon_0$ = 10^(-10)

= ligne de champ dans le cas d’une seule charge

On appelle "ligne de champ" une ligne telle qu'en tout point **M** de la ligne le champ électrique **E(M)** mesuré au même point lui est parallèle ; dans le cas présent la symétrie sphérique de la charge et de l'espace entraine que toutes les lignes de champ soient des droites qui passent par cette charge . Ces lignes de champ sont orientées dans la direction opposée à la charge si celle ci est positive .

Principe de superposition

= dans le vide il y a addition vectorielle des champs créés par plusieurs charges ponctuelles ; on retiendra que cette loi de superposition (ou d'addition) n'est vraie que dans le vide , par opposition au cas d'un diélectrique qui fera l'objet d’un chapitre ultérieur .

= on généralise la loi de Coulomb en l'étendant au cas d'une distribution continue de charges ; (densités volumiques , surfaciques , linéaires)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{(\mathbf{V})} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \rho \, (\mathbf{r'}) \, \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r'})}{|(\mathbf{r} - \mathbf{r'})|^{\mathbf{3}}} \, dv \, (\mathbf{r'})$$

Cette expression vectorielle donne le champ créé en **r** par une densité volumique de charges ρ (**r'**). L'intégration s'étend au volume fini ou infini où existe une densité de charges (sous réserve qu'au point **r'** il n'y ait pas une densité infinie de charges afin que l'intégrale précédente garde une définition mathématique simple) .

= premier exemple traité extensivement : le dipôle électrique

On appelle dipôle électrique l'association de deux charges de signes opposés +q et -q , placées à une distance d fixe l'une de l'autre .

La solution d'un problème de physique , en particulier le calcul du champ produit par une densité de charges , commence toujours par l'étude de la symétrie ; elle permet très souvent de simplifier les calculs ; plus généralement le principe de Curie assure que les "effets" (le champ créé) n'est pas moins symétrique que la cause (la distribution de charges) . Pour le dipôle on distingue les "opérations de symétrie géométrique" suivantes : rotation autour de l'axe du dipôle , symétrie dans un plan contenant l'axe du dipôle , symétrie par rapport à un plan perpendiculaire au dipôle et passant par son centre ; la connaissance de ces symétries permet de faire un choix de variables plus simple , et de vérifier , tout calcul fait , que le champ obéit bien aux lois de symétrie repérées ; pour le dipôle , à grande distance (d<< r) le calcul se simplifie encore quand on procède à un développement limité .

On pose : p = q d où q est la charge positive ; d est la distance entre les deux charges ; **p** s'appelle le moment dipolaire ; il est orienté de la charge négative vers la charge positive .

En coordonnées shériques on obtient les trois composantes de **E (r)** = **E** (r , θ) :

$$E_{\phi}(\mathbf{r}) = 0 \qquad E_{\theta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3} \qquad E_{r}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2 p \cos\theta}{r^3}$$

L'étudiant fera l'exercice qui consiste à écrire ce résultat en coordonnées cartésiennes .

= deuxième exemple : champ produit par une densité linéaire λ de charges à une distance **r** d'un fil : cas du fil infini , mince

= troisième exemple : champ créé à une distance **r** d'un plan infini portant une densité de charges surfacique uniforme σ.

Propriétés du champ électrique

= définition d'une ligne de champ; appliquer aux exemples précédents

= premières équations de Maxwell dans le vide :

- propriétes “ locales ” ;

On appelle “ loi locale ” une expression , différentielle ou non , qui relie des grandeurs en un même point de l'espace de configuration [l'espace de configuration est un espace dont la base comprend l'ensemble des paramètres qui caractérisent l'état du système : pour un gaz de la théorie cinétique l'ensemble des coordonnées **r** et t de chaque molécule ; pour l'électromagnétisme ce sera l'ensemble **r** , t relatif aux deux champs couplés **E** (**r**, t) et **B**(**r** , t)]. L'exemple de loi locale le mieux connu des étudiants est la loi de la dynamique d'un point matériel .
Le rotationnel et la divergence de **E** sont nuls en tout point **r** (sauf à l'origine) pour le champ créé par une seule charge placée elle-même à l'origine car on démontre directement que pour $\mathbf{r} \neq 0$:

$$\nabla.\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{rot}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0$$

Le théorème d'addition entraîne que ces relations sont vraies aussi pour une collection de charges ponctuelles , pourvu qu'elles soient placées en des points distincts du point **M** où l'on exprime la relation locale ; il en résulte qu'en tout point **M** où il n'y a pas de charge**:**

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{E}(\mathbf{M})) = \mathbf{0} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{div}\,(\mathbf{E}(\mathbf{M})) = 0$$

Ces deux relations vectorielles , soit quatre équations (3+1) , constituent les lois de Maxwell , en un point **M** , dans le vide (là où il n'y a pas de charge) .

- propriétés “ globales ”

On appelle loi "globale" une loi qui relie des quantités intégrales entre elles ; un exemple simple est le suivant : deux particules qui font un choc conservent l'énergie totale , quel que soit le type de choc (élastique ou pas) et quel que soit le nombre des produits de la réaction .
: première loi globale :
des résultats mathématiques généraux , sous réserve de régularité des fonctions , permettent d'écrire :

$$\int_{(S)} \mathbf{rot}\,(\mathbf{E}(\mathbf{M})) \bullet \mathbf{ds}\,(\mathbf{M}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{(C)} \mathbf{E}(\mathbf{M}) \bullet d\,\mathbf{M} = 0$$

en somme , la circulation de **E** sur le contour (C) fermé (théorème de Stokes ou théorème 1 dans lasuite) est nulle ; cette conclusion résulte de la propriété du rotationnel d'être nul partout .
: deuxième loi globale :

$$\int_{(V)} \mathrm{div}\,(\mathbf{E}(\mathbf{M}))\, dv(\mathbf{M}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{(S)} \mathbf{E}(\mathbf{M}) \bullet \mathbf{ds}(\mathbf{M}) = 0 = \phi(S)$$

ϕ (S) est par définition le flux de **E** à travers une surface fermée (S) ; il est nul ici si le volume délimité par la surface (S) ne contient pas de charge (théorème d'Ostrogradski ou théorème 2 dans la suite).
Dans les deux formules **ds** (**M**) est un élément de la surface S compté perpendiculairement à la surface au point considéré **M** et orienté par convention vers l'extérieur du volume délimité par (S) ; dv (**M**) est un élément de volume , centré en **M** .

= lois de Maxwell et théorème de Gauss ; expression plus générale des lois de Maxwell

On se place ici dans une situation qualitativement différente de celle décrite précédemment : on veut examiner ce que deviennent les équations de Maxwell en présence de charges à l'intérieur du volume V limité par la surface S ; en procédant par étapes on a successivement :

- cas des charges ponctuelles

$$\phi(S) = \left(\sum_{\mathbf{k}} q_k\right) \frac{1}{\varepsilon_0}$$

C'est la première forme du théorème de Gauss ; elle donne le flux de **E** à travers une surface (S) quelconque , fermée , contenant des charges ponctuelles q_k ; ce théorème résulte d'un calcul préalablement effectué pour une seule charge , entourée par une surface S qui est une sphère centrée sur la charge ;

- premières loi de Maxwell : généralisation à une distribution continue

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{E}\,(\mathbf{M})) = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{E}\,(\mathbf{M})) = \frac{\rho\,(\mathbf{M})}{\varepsilon_0}$$

On démontre directement la deuxième loi de Maxwell (loi " locale ") en un point **M** où existe une densité de charges volumique ρ**(M)**

- théorème de Gauss dans le cas d'une distribution continue

$$\int_{(V)} \mathrm{div}\,(\mathbf{E}\,(\mathbf{M}))\,\mathrm{dv}(\mathbf{M}) =$$

$$\int_{(\mathbf{V})} \frac{\rho\,(\mathbf{M})}{\varepsilon_0}\,\mathbf{dv}\,(\mathbf{M}) \Rightarrow \int_{(S)} \mathbf{E}\,(\mathbf{M}) \bullet \mathbf{ds}\,(\mathbf{M}) = \phi(S)$$

Cette formule résume le " fameux " théorème de Gauss relatif au flux de **E** à travers une surface (S) fermée contenant une densité de charges ; sous cette forme , c'est une extension , en vertu du théorème d'addition , de la forme qu'il prend pour une charge ponctuelle .

= exemples d'application du théorème de Gauss

- exemple de la ligne uniformément chargée ; densité linéique λ ; calcul du champ créé à la distance r de la ligne ;
- exemple de la sphère uniformément chargée en volume ; champ à l'intérieur et à l'extérieur ;
- exemple du plan uniformément chargé de densité surfacique = σ ; calcul du champ à la distance **r** du plan ;

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\mathbf{r}^0$$

- remarques à la suite de ces exemples

Il est interessant de noter que le champ produit par un plan infini (dimensionalité deux) , chargé uniformément , varie à la distance r du plan comme $(r)^{0}$;

: le champ produit par une ligne infinie (dimensionalité un) chargée uniformément varie comme $(r)^{-1}$; .

: le champ produit par une charge ponctuelle varie à la distance r comme $(r)^{-2}$: on peut dire de cette charge (ou un groupe de charges dont la somme algébrique est non nulle) que sa dimension est zéro car elle est localisée .

: enfin pour un dipôle le champ varie à grande distance r comme $(r)^{-3}$: sa charge totale est nulle mais elle est fractionnée en deux éléments , positif et négatif , placés à distance finie l'un de l'autre .

- remarque " mathématique " (voir aussi cours de maths)

On l'a noté , la quantité div (**E**) est nulle partout où il n'y a pas de charge ponctuelle ; ainsi , le théorème de Gauss peut aussi s'écrire , quel que soit le volume V :

$$\int_{(V)} \left[\frac{\varepsilon}{q}\ \mathrm{div}\,(\mathbf{E}(\mathbf{r}))\right] dv(\mathbf{r}) = 0 \text{ si (V) n'entoure pas la charge ponctuelle}$$

$$= 1 \text{ si (V) entoure la charge ponctuelle}$$

Selon cette présentation , la quantité entre crochets n'est autre que la distribution $\delta(\mathbf{r})$ à trois dimensions que , par abus de language , les physiciens nomment fonction $\delta(\mathbf{r})$ avec la propriété :

$$\int_{(V)} f(\mathbf{r})\ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})\ dv(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r_0})$$

En vertu du même abus de language , on dira que la densité de charge associée à une charge ponctuelle q placée à l'origine des coordonnées , est :
$\rho \ (\mathbf{r}) \ \equiv \ q \ \ \delta \ (\mathbf{r})$

Potentiel électrique

= définition du potentiel électrique

- définition mathématique :

$$\boxed{\mathbf{E} \ (\mathbf{M}) \ = - \ \mathbf{grad} \ (V(\mathbf{M})) \ \ = -\nabla V(\mathbf{M})}$$

C'est l'expression du potentiel électrique V exprimé au point **M** ; V est une grandeur scalaire ; il est défini à une constante près mais il en résulte le même champ ; la constante que l'on peut vouloir ajouter à ce potentiel a donc une valeur dont on peut convenir sans contrainte ; souvent on dit que la "masse électrique" est au potentiel nul ; elle joue le rôle dévolu au réservoir en thermodynamique et peut fournir à un système en contact électrique avec elle des charges sans changer son potentiel V=0 .

- propriété globale : circulation du champ électrique d'un point à un autre :

$$\boxed{\int_A^B \mathbf{E} \ (\mathbf{M}) \ . \ \mathbf{dM} \ = \ V \ (\mathbf{A}) - V(\mathbf{B})}$$

Cette expression ne résulte que des propriétés mathématiques de la fonction " gradient " ; la constante que l'on peut vouloir ajouter au potentiel disparait dans cette expression .

- propriété locale : loi de Maxwell ; laplacien du potentiel : loi de Poisson
En combinant la divergence du champ et la définition du potentiel on obtient la loi de Poisson :

$\text{div} \ (\mathbf{E} \ (\mathbf{M}) \ ) = \dfrac{\rho \ (\mathbf{M})}{\varepsilon_0}$ On pourrait dire que c'est la forme différentielle du théorême de Gauss ; on a par conséquent :

$$\Delta V(\mathbf{M}) = -\frac{\rho(\mathbf{M})}{\varepsilon_0}$$

C'est une loi " locale " valable en un point **M** où existe une densité volumique de charges .

- potentiel à l'infini ; commentaires
- remarque " mathématique "

en se souvenant d'une remarque préalable , dans le cas de la charge ponctuelle, l'équation de Poisson montre que :

$$\Delta \mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}[\mathbf{q}_0 \ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})] = \Delta\left[\frac{\mathbf{q}_0}{4\pi\ \varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_0}|}\right]$$

on obtient ainsi une égalité entre deux distributions :

$$\Delta\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_0}|}\right) \equiv -4\pi\ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})$$

= exemples de calculs de potentiels

- cas d'une charge isolée
- cas d'une ligne infinie chargée λ à une distance r

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda \ \mathrm{Log}\ r/a$$

- cas du dipôle : cas limite du potentiel vu à l'infini ou à une distance **r** du centre ; expression du tenseur de champ électrique ;

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \overline{\overline{\mathbf{T}}} \bullet \mathbf{p} \qquad \overline{\overline{\mathbf{T}}} = \frac{1}{r^3}\left(\overline{\overline{\mathbf{1}}} - 3\frac{\mathbf{r}\,\mathbf{r}}{r^2}\right) \qquad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p} \bullet \mathbf{r}}{r^3}$$

L'étudiant calculera , en coordonnées sphériques , les équations donnant le potentiel et les lignes de force d'un dipôle électrique .

= potentiel et champ créés par une distribution continue de charges ; propriétés de continuité

- expression générale du potentiel

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \int_{(\mathbf{V})} \rho(\mathbf{r'}) \frac{1}{4\Pi\ \varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} dv(\mathbf{r'})}$$

C'est la solution générale de l'équation de Poisson en l'absence de conditions aux limites imposées sur les bords du volume considéré ; V ($\mathbf{r}$) est continu dans toutes les circonstances , même à la traversée d'une distribution superficielle de charges : c'est une conséquence mathématique de la forme de l'intégrale précédente tant que ρ ou σ restent finis.

- démonstration

Pour ce faire on utilise l'égalité entre "distributions " démontrée plus haut en appliquant l'opérateur $\Delta_{\mathbf{r}}$ aux deux membres de l'expression précédente afin de vérifier que cette solution satisfait bien à l'équation de Poisson :

$$\Delta_{\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) = \int_{(V)} \rho(\mathbf{r'}) \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0} \Delta_{\mathrm{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} dv(\mathbf{r'})$$

$$= \int_{(V)} \rho(\mathbf{r'}) \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} [- 4\pi\,\delta(\mathrm{r} - \mathrm{r'})]\ dv(\mathbf{r'}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

- application au calcul du champ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \int_{(V)} \rho(\mathbf{r'}) \frac{1}{4\Pi\ \varepsilon_0} \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r'} - \mathbf{r}|}\right) dv(\mathbf{r'})$$

$$= \int_{(V)} \rho(\mathbf{r'}) \frac{1}{4\Pi\ \varepsilon_0} \nabla_{\mathbf{r'}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r'} - \mathbf{r}|}\right) dv(\mathbf{r'})$$

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{(V)} \rho(\mathbf{r'}) \frac{1}{4\Pi\ \varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3} dv(\mathbf{r'})}$$

champ créé en $\mathbf{r}$ par une distribution volumique de charges ; le champ est continu en toutes circonstances , sauf à la traversée d'une couche de densité superficielle (voir paragraphes suivants)

- développement multipolaire d'une densité de charges : application au calcul du potentiel dans le cas de diverses symétries

Energie électrostatique

= énergie d'une charge dans un champ extérieur fixe .(*première expérience d'électrostatique*)

On appelle " variation d'énergie électrostatique " d'une charge dans un potentiel extérieur fixe la quantité d'énergie , ou travail mécanique, qu'il faut lui fournir pour l'amener d'un point à un autre .Si **f(M)** est la force "exercée" sur la charge par le champ extérieur , la force extérieure qu'un acteur doit "appliquer" pour la déplacer est (**-f(M)**) ; son travail est :

$$dW_{mec}^{ext} = (-\mathbf{f}(\mathbf{M}).d\mathbf{M}) = dU_{el.stat}$$

On peut aussi dire que c'est la " variation d'énergie interne " ou la " variation d'énergie électrostatique " du système thermodynamique (ici la seule charge) dans le champ extérieur. Entre deux points A et B la variation d'énergie électrostatique est donc :

$$\boxed{\Delta \mathbf{U}_{\mathbf{el.st.}} = -q \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{E}(\mathbf{M}) \bullet \mathbf{dM} = q\,(V(\mathbf{B}) - V(\mathbf{A})) = \Delta U}$$

Le travail total effectué sur une charge au cours d'un circuit fermé est nul ; de même , il importe peu de connaître quel est le chemin exact suivi pour aller de **A** en **B** .
Si V(**A**) = 0 , on a défini " l'énergie électrostatique ". de la charge en **B** dans le champ extérieur :
$U_{el.st.} = q\,V(\mathbf{B})$.

= énergie d'un dipôle électrique dans un champ extérieur ; actions mécaniques (*deuxième expérience d'électrostatique*)

- énergie d'un dipôle dans un champ extérieur **E (r)**

Composé de deux charges opposées tenues rigidement l'une avec l'autre , dans un champ extérieur le dipôle a une énergie électrostatique qui peut être calculée directement en utilisant le résultat de la première expérience

$U = (-q)\, V(\mathbf{r}) + (q)\, V(\mathbf{r}+\mathbf{d}) = q\, \mathbf{l} \,.\, \nabla V = -\, \mathbf{p}.\mathbf{E}(\mathbf{r})$

- forces "exercées" sur le dipôle par un champ extérieur ; forces "appliquées" sur un dipôle pour le déplacer dans un champ extérieur

le travail $(dW)_{ext}$ des forces appliquées au dipôle dans un déplacement-rotation élémentaire $d\mathbf{M}$-$d\Omega$ est tel que :

$(dW)_{ext} = -\, dW = dU_{el.st.} = -d(\mathbf{p}.\mathbf{E}) = -(\mathbf{p}.d\mathbf{E} + \mathbf{E}.d\mathbf{p})$
pour un dipôle indéformable on a $d\mathbf{p} = d\Omega \times \mathbf{p}$ (rotation simple)
et $\mathbf{p}.d\mathbf{E} = \nabla [(\mathbf{E}.\mathbf{p})] \,.\, d\mathbf{M}$ (translation d'ensemble) ; ainsi:

$(dW)_{ext} = -\nabla [(\mathbf{E}.\mathbf{p})] \,.\, d\mathbf{M} - \mathbf{E}.(d\Omega \times \mathbf{p}) = -\nabla [(\mathbf{E}.\mathbf{p})] \,.\, d\mathbf{M} - d\Omega \,.\, (\mathbf{p} \times \mathbf{E})$

la force "exercée" sur le dipôle au dipôle est donc **:** $\nabla [(\mathbf{E}.\mathbf{p})]$
la force "appliquée" pour effectuer ce déplacement est : $-\nabla [(\mathbf{E}.\mathbf{p})]$
le couple "exercé" dans une rotation $d\Omega$ est : $\mathbf{p} \times \mathbf{E}$

- Si à l'échelle du dipole le champ extérieur est uniforme , les deux charges subissent deux forces "exercées" en sens contraire ; seul un couple **C** est "exercé" ; $\mathbf{C} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$
ou encore $C(\theta) = pE \sin(\theta)$
En raison de ce couple , l'énergie potentielle mécanique du dipôle dépend de son orientation ; lorsqu'un couple mécanique "appliqué" travaille il échange de l'énergie avec le dipôle et :
$dU_{el.st.} = -C(\theta)\, d\theta$; dont on déduit : $U_{el.st.}(\theta) = -pE \cos(\theta)$
son énergie électrostatique est minimum pour $\theta = 0$ (alignement dans le champ)

= énergie interne électrostatique d'un système de charges

On utilisera le terme "énergie électrostatique d'un système de charges" pour désigner le travail qu'il faut effectuer pour assembler les différentes composantes de ce système en les amenant depuis l'infini , où leur énergie interne est nulle , à la position qu'elles doivent occuper chacune dansl'état final .

- cas des charges ponctuelles (*troisième expérience d'électrostatique*)

$$U_{el.stat.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{q_k \;\; q_l}{|\,\mathbf{r_k} - \mathbf{r_l}\,|} = \frac{1}{2} \sum_k q_k \; V_k$$

= expression générale de l'énergie électrostatique interne d'une distribution continue de charges ; (*quatriéme expérience d'électrostatique*)

$$U_{el.st.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{1}{2} \iint \rho(\mathbf{r_1})\; \rho(\mathbf{r_2}) \frac{1}{|\,\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}\,|} \; dv(\mathbf{r_1})\; dv(\mathbf{r_2})$$

- expression en termes de potentiel

$$U_{el.st.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \int \rho\,(\mathbf{r}_1)\ V(\mathbf{r}_1)\ dv\,(\mathbf{r}_1)$$

Cette intégrale s'étend au seul volume où il existe une densité de charge

- expression en termes de champ électrique

$$\boxed{U_{el.st.} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r})\ dv\,(\mathbf{r})}$$

l'intégrale s'étend à tout l'espace où règne le champ .

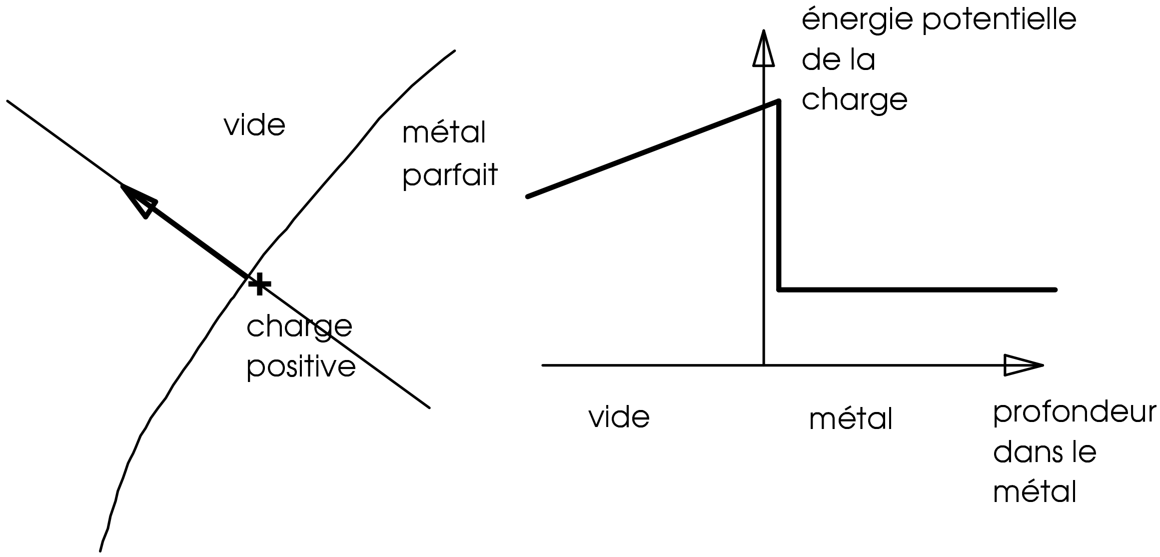
Unités electrostatiques

L'unité de charge est le Coulomb qui est aussi le produit d'une intensité par un temps :
(charge) = (intensité de courant) * (temps) $\Rightarrow$ (Coulomb) = (Ampère) * (seconde)
La loi de Coulomb et l'expression de l'énergie d'une charge donnent par ailleurs le rapport entre force , charge , champ électrique et longueur
(potentiel électrique) = (champ électrique) * (longueur) = = (énergie) * (charge) ^-1
$\Rightarrow$ (Volt) = (kilogramme) *(metre) ^2*(Coulomb) ^-1 * (seconde) ^-2
On en déduit expérimentalement une valeur de ε :
ε = 8.854 *10^-12 * (Coulomb) ^2*(seconde)^2*(kilogramme)^-1*(metre)^-3
ou encore , de manière simplifiée :

$$\boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 * 10^9}$$

conducteur en electrostatique ; équation de Poisson et conditions aux limites

= discussion physique relative à la surface d'un conducteur



= équilibre d'un conducteur chargé électriquement ; équilibre dans un champ extérieur

- Définitions des grandeurs de surface : densité surfacique de charges

Pour un élément de volume quelconque , on définit sans ambigüité la densité de charges par unité de volume ρ et la quantité de charges dQ dans un volume dv :

$$\rho = \frac{dQ}{dv}$$

Pour un volume ABCDA'B'C'D' découpé dans l'espace tel que dS est la surface du volume et dl sa hauteur :

dv = dS dl

(voir figure 1 ci dessous)

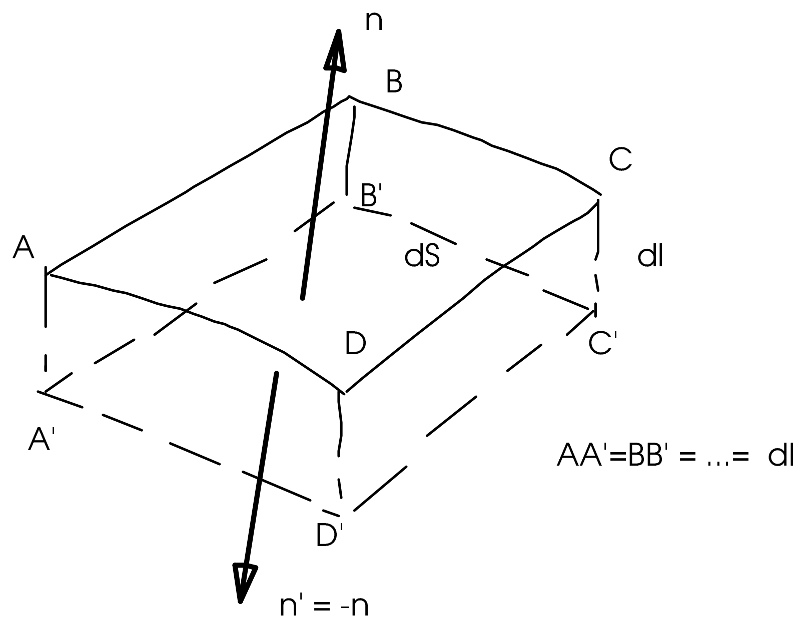


figure 1

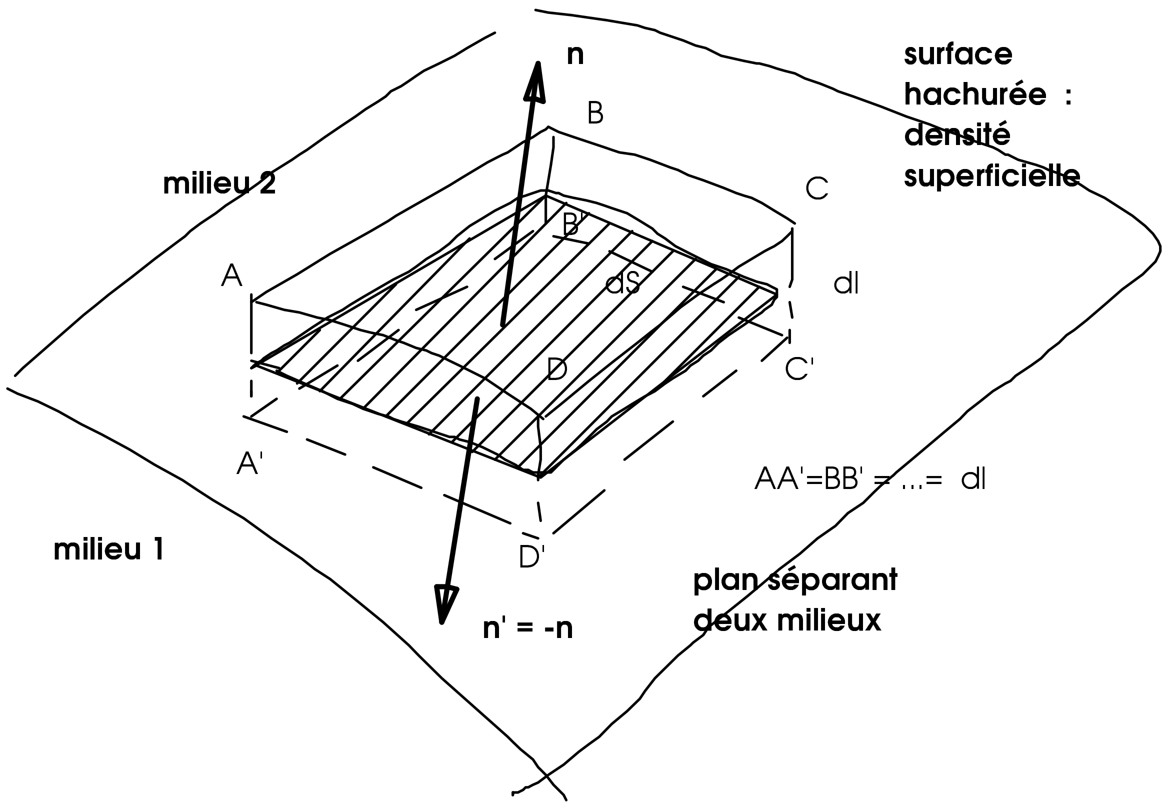
$\rho \ dS \ dl = dQ \quad -> \quad \rho \ dl = \frac{dQ}{dS}$

Si , en diminuant dl à dS constante $\frac{dQ}{dS}$ reste fini , on a défini une densité de charges par unité de surface σ = limite ($\frac{dQ}{dS}$) = limite (ρ dl)

Bien entendu cette “ opération ” n’a d’intérêt que si la surface limite que l’on obtient quand dl->0 présente une singularité : le fait d’avoir une densité surfacique ; autrement :
limite (ρ dl) ->0 et l’on revient au cas d’une densité de charge “ régulière ” .

- densité de charge à la surface d’un conducteur ; ligne de champ perpendiculaire à la surface ; courants tangentiels nuls ; discontinuité des composantes perpendiculaires du champ à travers la surface

La démonstration se fait à l’aide du théorème de Gauss ; pour cela on examine le flux du champ électique à travers la surface du volume élémentaire ABCDA’B’C’D’ de la figure 2



; la surface de séparation des milieux 1 et 2 est chargée ; on a construit le volume élémentaire de manière à ce que l'interface des milieux 1 et 2 partage ce volume et reste toujours compris dà son intérieur quand dl-> 0 .
Dans l'utilisation du théorème , le flux du champ à travers les surfaces latérales tend vers 0 quand dl-> 0 ; il ne reste que celui à travers les deux grandes surfaces ds ; (attention au sens des normales sur chacune des ces faces) .

De l'application du thèorème il résulte la première équation de continuité donnée ci dessous ; la deuxième résulte du théorème sur le rot (**E**) = **0**

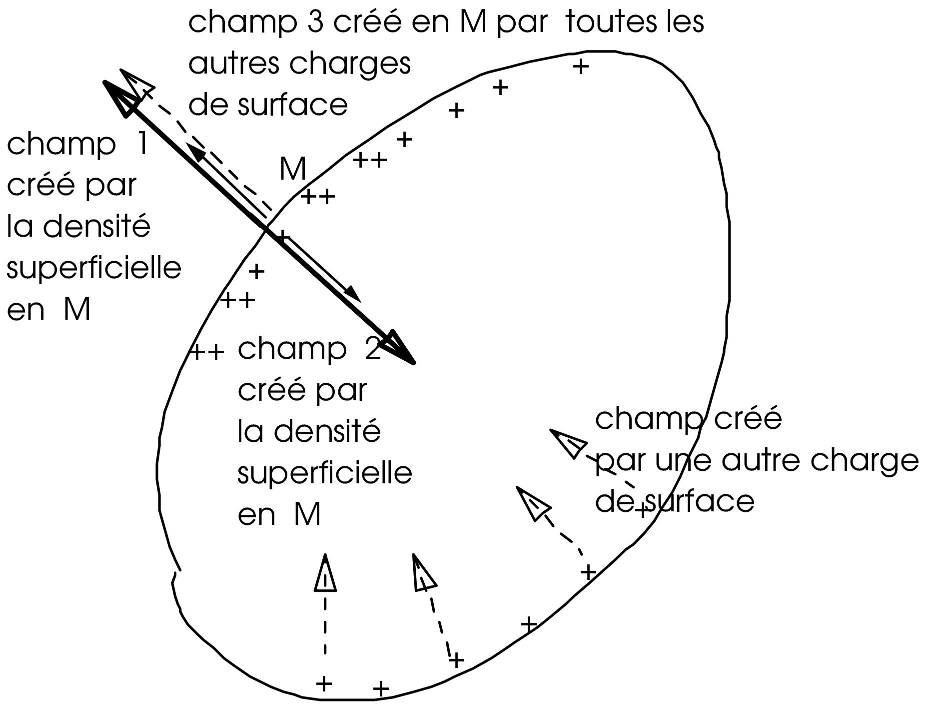
$$\mathbf{n(M)} \bullet (\mathbf{E_+(M)} - \mathbf{E_-(M)}) = \frac{\sigma(\mathbf{M})}{\varepsilon_0}$$

$$\mathbf{n(M)} \times (\mathbf{E_+(M)} - \mathbf{E_-(M)}) = \mathbf{0}$$

Ces deux équations régissent la continuité de **E** à la traversée d'une couche de densité superficielle de charges .

Dans le cas particulier de la surface d'un conducteur , des raisons physiques imposent que , dans le conducteur , le champ électrique soit nul à l'équilibre ; on a donc $\mathbf{E}_{-} = \mathbf{O}$; ainsi , pour un point **M** de la surface , mais juste à l'extérieur , les composantes de champ parallèles à la surface doivent être nulles et celle qui lui est perpendiculaire doit être égale à la densité de charge divisée par ε_0 .

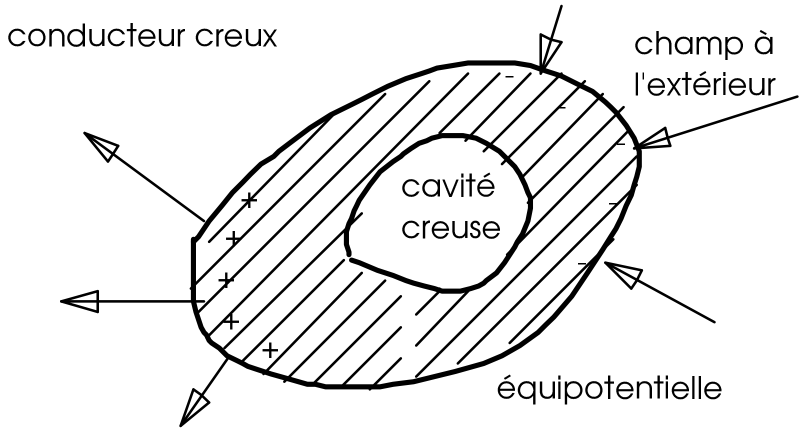
On peut d'ailleurs tenir un petit raisonnement qui montre que ce champ est le résultat , dans le vide d'une moitié $\dfrac{\sigma(\mathbf{M})}{2\varepsilon_0}$ du champ total , l'autre provenant de toutes les autres charges du conducteur



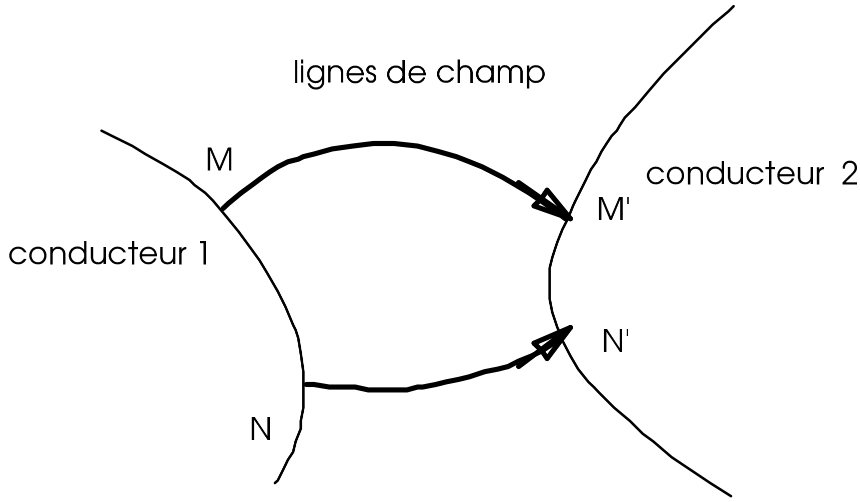
le champ total en M est la somme de 1+3 à l'extérieur du métal et de 2+3 à l'intérieur , où il est nul

figure 3

- cas particulier du conducteur creux ; c'est une autre conséquence du théorème de Gauss qu'il n'y ait pas de champ à l'intérieur d'un conducteur creux .



= conditions aux limites imposées aux équations de Poisson ; le potentiel doit obéir au fait que la surface d'un conducteur est une équipotentielle et au théorème des éléments correspondants



Les éléments correspondants sont
MN et M'N' ; leurs charges sont égales

= solutions des équations de Poisson en présence de surfaces conductrices;

On a écrit dans les paragraphes précédents une solution formelle pour V(**r**) dans un espace infini quand il est engendré par une densité de charges quelconque . Après tout , on pourrait aussi adopter la solution formelle analogue :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(S)} \frac{\sigma(\mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} \, ds(\mathbf{r'})$$

elle obéit bien à l'équation de Poisson et elle satisfait les conditions aux limites requises (E (**r** $)_+ \;=\; \dfrac{\partial V}{\partial n}$). Mais il est difficile , pratiquement , de suivre cette voie sinon dans quelques circonstances où la symétrie et la solution se " devinent " (plan uniformément chargé ; surface sphérique isolée) .

Quelle procédure systématique faut-il utiliser pour déterminer des solutions qui obéissent en même temps aux conditions de surface énoncées ci dessus ? c'est à dire dans un espace infini où il y a des surfaces chargées , conductrices , reliées à des potentiels différents .

- on montre d'abord que la solution est unique ; c'est un résultat général (voir théorème de Kirchhoff dans le quatrième chapitre)
- que pour des surfaces qui ne s'étendent pas jusqu'à l'infini , à grande distance , le potentiel décroît au moins aussi vite que 1/r .
- après quoi il est nécessaire de repérer la symétrie du problème , et de chercher des solutions générales de l'équation de Poisson qui satisfassent cette symétrie (géométrie et conditions aux limites) ainsi qu'une bonne décroissance à l'infini
- la solution convenable est imposée par les conditions aux limites qui sélectionnent les solutions particulières dans l'ensemble précédent .

= exemple du cylindre dans un champ extérieur perpendiculaire à son axe

On considère un cylindre creux, de surface métallisée , infiniment long , d'axe z, de rayon R ; un point de la surface du cylindre est donc repéré par ses coordonnéees cylindriques : (R , φ , z) ; de même , un point de l'espace est repéré par (r , φ , z) ; ce cylindre , relié en permanence à un potentiel nul , est placé dans un champ électrique extérieur $\mathbf{E}_0$, uniforme , dirigé perpendiculairement à son axe z ; l'angle φ=0 correspond à l'orientation du champ extérieur :

$\mathbf{E}_0\,(r , \varphi , z) = \mathbf{E}_0$

On demande de calculer le champ électrique total $\mathbf{E}_T(r , \varphi , z)$ en tout point de l'espace , et la répartition des charges induites sur la surface du cylindre .

: symétrie du problème :

comme il y a invariance par translation du système le long de l'axe z il n'y aura aucune dépendance du potentiel , du champ total ou de la répartition de charge en fonction de cette variable ; le plan φ=0 passant par l'axe du cylindre sera un plan de symétrie pour le système total : cylindre + champ extérieur ; une fois le calcul terminé on vérifiera que la solution obéit à ces symétries .

: l'équation de Poisson porte donc sur le potentiel total $V_T(r , \varphi)$ qui se décompose , comme le champ , en une contributiuon provenant des charges réparties sur le cylindre : $V_{surf}(r , \varphi)$ et en une autre , le potentiel extérieur V_{ext} qu'il est aisé de calculer :

$V_{ext}(r , \varphi) = - r \cos(\varphi)\, E_0$

en coordonnées cylindriques l'équation de ¨Poisson s'écrit :

$$\Delta [V_T (r , \varphi)] = [(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}) (r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}] V_T (r , \varphi) = 0$$

la solution la plus générale de cette équation est bien compliquée , mais la dépendance en cos(φ) du potentiel extérieur invite à chercher une solution en cos (φ) où les variables r et φ seront séparées (comme dans l'équation différentielle) :

$$V_T (r , \varphi) = \sum_n a_n r^n \cos (\varphi)$$

les inconnues sont les coefficients a et la ou les valeurs de n possibles ;
en reportant dans l'équation de Poisson on voit vite que l'on est contraint à satisfaire :

$$\sum_n (n^2 - 1) \; a_n \; r^{n-2} \cos (\varphi) = 0$$

ce qui oblige à choisir nécessairement à choisir n =1 ou n = -1 ;
à l'extérieur du cylindre la solution n = 1 convient : c'est même la contribution du potentiel extérieur ; mais n=-1 convient aussi , car cette solution remplit la condition que les charges réparties sur la surface ne peuvent donner un potentiel croissant avec la distance r quand r tend vers l'infini ; ainsi la contribution dûe aux charges superficielles et le potentiel total seront :

$$V_{surf} = a/r \cos (\varphi)$$

$$V_T (r , \varphi , z) = a/r \cos (\varphi) - r \cos (\varphi) E_0$$

la constante d'intégration est déterminée par la condition aux limites : valeur du potentiel sur la surface , soit :

$$V_T (R , \varphi , z) = 0$$

ce qui entraîne simplement que $a = E_0 R^2$ et donc :

$$V_T (r , \varphi , z) = (- r + \frac{R^2}{r}) E_0 \cos (\varphi)$$

on peut en déduire les valeurs du champ électrique en tout point extérieur au cylindre ; on connait déjà la contribution du champ extérieur mais il est utile de la décomposer en ses projections

$$E_{r\,ext} = E_0 \cos (\varphi) \qquad \text{et} \qquad E_{\varphi\,ext} = - E_0 \sin (\varphi)$$

le champ dû aux charges se calcule à partir de

$$V_{surf} (r , \varphi , z) = \frac{R^2}{r} E_0 \cos (\varphi) \qquad \text{avec } r > R \qquad \text{soit :}$$

$$E_{r\,surf} (r , \varphi , z) = \frac{R^2}{r^2} E_0 \cos (\varphi) \qquad \text{et} \quad E_{\varphi\,surf} (r , \varphi , z) = \frac{R^2}{r^2} E_0 \sin (\varphi)$$

: à l'intérieur du cylindre on ne peut choisir la solution n =-1 car cela signifierait qu'au centre (r = 0) le champ ou le potentiel seraient infinis ; si mathématiquement c'est possible , physiquement , c'est interdit ; reste donc la seule possibilité n = 1. Mais comme à l'intérieur de cette électrode métallique le potentiel doit être nul , on en déduit que le champ dû aux charges superficielles est exactement opposé au champ extérieur ; la résultante des deux est nulle .

: les conditions à la limite sur la surface du cylindre sont bien vérifiées : en particulier le champ total tangent est nul

$$E_{\varphi\,T}(R, \varphi, z) = 0$$

la composante r de ce champ total pour r =R donne la densité superficielle en tout point , soit :

$$\sigma\,(R, \varphi, z) = \varepsilon_0\;2E_0 \cos(\varphi)$$

: conclusion : on comparera ce résultat avec celui d'une sphère métallique creuse placée dans le même champ extérieur ; à moins que l'étudiant ne veuille se lancer dans le calcul de ce nouveau problème par imitation avec celui-ci .

= capacité

Les équations de l'électrostatique sont linéaires ; les potentiels sont proportionnels aux charges, quelle que soit leur distribution ; si donc on a à faire à des conducteurs (1, ...j , ...) dont la charge est Q_j on est en droit d'écrire :

$$V_i = \sum_j p_{ij}\, Q_j$$

Ces équations étant linéaires et homogènes , on peut les inverser et écrire :

$$Q_i = \sum_j C_{ij}\, V_j$$

en faisant ainsi apparaître les coefficients influence C_{ij} ; la capacité d'un conducteur est donc la charge totale d'un conducteur lorsqu'il est maintenu au potentiel unité et que tous les autres sont au potentiel nul .

Les mêmes formules pour l'énergie montrent que

$$U_{el.st.} = \frac{1}{2}\sum_1^n Q_i V_i = \frac{1}{2}\sum_1^n \sum_1^n C_{ij} V_i V_j$$

Méthode des images

La " méthode des images " , si elle 'est pas susceptible d'être employée en toute circonstance , est un bon example pour comprendre les règles de l'électrostatique ; à ce titre , ce paragraphe peut servir d'exercice d'application pour les étudiants.

On emploie cette méthode lorsque l'on considère une ou plusieurs charges ponctuelles au voisinage d'une surface de discontinuité ; ici il s'agit de la surface d'un conducteur ; on verra plus tard le cas d'une interface entre le vide et un diélectrique . Dans les cas " pratiquables " , la géométrie du système suggère que la surface conductrice peut être remplacée par une ou plusieurs charges fictives , ou " images " , dont l'effet est d'assurer sur le lieu géométrique de la surface les conditions imposées au champ électrique dans la situation réelle . Ces images doivent être placées hors du volume réel puisque la solution de l'équation de Poisson dans le volume est imposée .

= cas du plan

Un exemple simple fera comprendre ce language . Soit un plan conducteur infini relié au potentiel 0; à la distance D du plan on place une charge Q ; il n'est pas difficile de voir que si derrière le plan on place une charge -Q à la distance D on reproduit une distribution de champ électrique qui satisfait aux conditions aux limites sur le conducteur ; la force de Coulomb qui attire les deux charges Q et -Q est identique à celle qui attire la charge Q vers le plan conducteur .

= cas de la sphère

Un deuxième exemple , classique lui aussi , est le suivant . On considère une sphère de rayon a , métallique , reliée à la masse ; on approche à la distance **r** du centre une charge Q ; on demande de calculer le potentiel en tout point de l'espace et la charge sur chaque élément de surface de la sphère .

Il est évident que par symétrie la direction **r** =r **n** devra porter la ou les charges " images " ; supposons qu'il n'y ait besoin que d'une seule charge image Q' , à la distance r' du centre ; en un point **R**=R **u** extérieur à la sphère le potentiel serait :

$$V(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}'|}$$

$$V(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a\left|\mathbf{u}-\mathbf{n}\frac{r}{a}\right|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{r'\left|\mathbf{n}-\mathbf{u}\frac{a}{r'}\right|}$$

Si l'on veut que ce potentiel soit nul il faut à la fois : $\frac{Q}{a} = -\frac{Q'}{r'}$ et $\frac{r}{a} = \frac{a}{r'}$ Ce sont deux équations qui déterminent Q' et r' . On sait alors calculer la densité de charge en un point quelconque de la sphère et la force d'attraction de la sphère sur Q . On demande aux étudiants de résoudre le même problème en imposant cette fois que la sphère soit à un potentiel fixe U .