Notion de courant de particule ; conservation du courant

= expression du courant de particules chargées ;

- cas d'une charge isolée en mouvement et par extension d'un ensemble de charges;

$\mathbf{j}_k = q_k \mathbf{V}_k$ $\mathbf{J} = \sum_k q_k \mathbf{v}_k$

- cas d'une densité de charges ;

On appelle densité de courant électrique **j** en un point **M (** dans le seul cas où il n'y a qu'une espèce de porteurs de charges) le produit de la densité de charges par leur vitesse d'ensemble **v** (**M**) au point **M ;**

$$\boxed{\mathbf{j}(\mathbf{M}) = \rho(\mathbf{M})\, \mathbf{v}(\mathbf{M})}$$

il est parfois utile d'écrire $\rho(\mathbf{M}) = q\, n(\mathbf{M})$ où la densité de charges est définie comme le produit de la charge q par le nombre de particules par unité de volume $n(\mathbf{M})$ **;**

Le courant passant à travers la surface **ds** par unité de temps est :

$$dJ = \mathbf{j}(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{ds}(\mathbf{M})$$

ds est un vecteur dont le module est égal à la surface ds et qui est orienté perpendiculairement à celle ci ; c'est la quantité de charges passant à travers **ds** par unité de temps .

- lignes de courant : c'est une ligne qui en tout point a une tangente parallèle au vecteur courant

- dans un fil électrique la densité de courant est supposée uniforme dans toute la section ; I est le courant total passant dans un fil de section S :

$$I = \int dJ = j\, S$$

= loi de conservation du courant : loi « locale » ;

- cas général ;

$$\boxed{\mathrm{div}(\mathbf{j}(\mathbf{M})) = -\partial\rho(\mathbf{M})/\partial t}$$

Pour démontrer cette loi on fait un bilan de charges dans un volume élémentaire tel qu'un cube ; la variation du nombre de charges dans ce volume est la différence entre celles qui rentrent et celles qui sortent à travers les six surfaces latérales du cube comptées deux à deux . C'est une loi que l'on retrouve sous la même forme en hydrodynamique ou chaque fois que l'on considère un fluide de particules (neutrons , électrons , molécules , chaleur) et que l'on doit écrire la conservation de la quantité scamaire ; on ajoute souvent dans le deuxième membre un terme de « source » (création ou disparition de particules) par unité de volume ; (création de neutrons dans les réacteurs , création d'électrons dans les semiconducteurs par effet photoélectrique ...)

L'étudiant voudra bien montrer que cette loi est invariante par transformation de Galilée , et il en déduira l'expression de **j .**

- cas stationnaire

Par définition du cas stationnaire , toutes les dérivées des grandeurs physiques par rapport au temps sont nulles : $\partial\rho\,(\,\mathbf{M}\,)/\partial t = 0.$ Il en résulte que le courant est une quantité constante (mais pas nécessairement uniforme) qui obéit à la loi locale :

$$\boxed{\mathrm{div}(\ \mathbf{j}\,(\,\mathbf{M}\,)\ ) = 0}$$

avec toutes les conséquences qui se déduisent du fait que la divergence du vecteur est nulle : existence de tubes de courants , flux de courant nul à travers une surface fermée.

Loi de Lorentz ; loi de Biot et Savart

= Loi de Lorentz : action du vecteur « champ magnétique » sur des charges électriques élémentaires animées d'une vitesse de déplacement **v**.

- cas d'une charge isolée

$$\boxed{\mathbf{F} = q\,(\ \mathbf{v} \times \mathbf{B}\ )}$$

Cette loi qui ne suppose rien de plus que l'existence de charges , « révèle » qu'en plus de la force résultant d'un champ électrique , si il y en a un , une charge subit une force liée à la présence d'un nouveau champ appelé « champ magnétique » ; nécessairement , la charge doit être en mouvement pour subir cette nouvelle force . On notera le caractère vectoriel de cette relation : les trois vecteurs nommés dans l'ordre : vitesse , champ , et force forment un trièdre direct .

- force élémentaire "exercée" sur un élément de courant **j (M)** en **M ;** c'est l' extension de la formule précédente à un élément de volume $\Delta v(\mathbf{M})$:

$\Delta \mathbf{F}(\mathbf{M}) = \mathbf{j}(\mathbf{M}) \times \mathbf{B}\ \Delta v(\mathbf{M})$:

- on particularise cette formule au cas d'un élément de fil conducteur $\Delta \mathbf{l}(\mathbf{M})$ en **M** parcouru par un courant I :

$\Delta \mathbf{F}(\mathbf{M}) = I\ \Delta \mathbf{l}(\mathbf{M}) \times \mathbf{B}(\mathbf{M})$

= loi de Biot et Savart : c'est la loi inverse de celle de Lorentz :

- création d'un champ magnétique d**B(r)** en **r** par une densité de courant **j (r')** en **r'** dans le petit volume **dv (r')**

$$\boxed{d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0\ c^2}\ \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}\ \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\ dv(\mathbf{r}')}$$

On se souviendra que cette loi fait intervenir la vitesse de la lumière c , ce qui ne doit pas manquer d'intriguer ; mais on a vu en Deug que la relativité restreinte permettait de comprendre cette liaison . En électromagnétisme on introduit une constante nouvelle dans la loi de Biot et Savart sous la forme $\frac{\mu_0}{4\pi} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0\ c^2}$

- par intégration de la formule précédente dans tout l'espace où il y a une densité de courant on obtient une expression donnant le champ total :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{(V)} d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{(V)} \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0\ c^2}\ \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}\ \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\ dv(\mathbf{r}')$$

On retrouve le fait qu'il y a une relation linéaire entre courant **j** et champ créé .

- cas particulier d'un fil porteur du courant I

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = I \int \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0\ c^2}\ \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}\ d\mathbf{l}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}$$

l'intégrale porte sur tous les éléments **dl (r')** du fil .

Propriétés du champ magnétique

= propriétés « locales »

- en présence de densité volumique **j (M)** de courant on va démontrer les lois de Maxwell « locales » qui portent sur **B(M)** :

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{B}) = 0$$

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{B}\,(\mathbf{M})) = \frac{1}{\varepsilon_0\, c^2}\,\mathbf{j}\,(\mathbf{M}) = \mu_0\,\mathbf{j}\,(\mathbf{M})$$

: pour démontrer la première équation on part de l'expression de **B (r)** et on utilise l'égalité vectorielle : $\mathbf{rot}\,(\mathbf{b})\,.\,\mathbf{a} = \mathbf{b}\,.\,\mathbf{rot}\,(\mathbf{a}) - \mathrm{div}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ que l'on reporte dans l'intégrale en identifiant la densité de courant **j (r')** au vecteur **b** et le vecteur $\dfrac{(\mathbf{r} - \mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3}$ au vecteur **a** ; dans la mesure où l'opérateur divergence porte sur la variable **r** , $\mathbf{rot}_{\mathbf{r}}(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ (aucune dépendance en **r) ;** par ailleurs comme :

$$\mathbf{rot}_{\mathbf{r}}\left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3}\right] = \mathbf{0}$$; on en déduit bien que $\mathrm{div}\,(\mathbf{B}\,(\mathbf{r})) = 0$

: la démonstration de la deuxième équation de Maxwell part de l'expression de Biot et Savart :

$$\mathbf{B}\,(\mathbf{r}) = \int_{(V)} \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0\, c^2}\,\mathbf{j}\,(\mathbf{r'})\times(\mathbf{r} - \mathbf{r'})\ \mathrm{dv}\,(\mathbf{r'})$$

$$= -\int_{(V)} \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0\, c^2}\,\mathbf{j}\,(\mathbf{r'})\times\nabla_{\mathbf{r'}}\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|}\right)\mathrm{dv}\,(\mathbf{r'})$$

on profite alors d'une autre identité : $\mathbf{rot}\,(f\,\mathbf{a}) = f\,\mathbf{rot}\,(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\times\nabla(f)$; en identifiant le vecteur **a** à **j(r')** , et la fonction f à $\dfrac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|}$ on peut écrire :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{rot}_{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0\ c^2} \int_{(\mathbf{V})} \frac{1}{|\mathbf{r'} - \mathbf{r}|^3}\ \mathbf{j}(\mathbf{r'})\, dv(\mathbf{r'}) \right]$$

Il reste alors à prendre une nouvelle fois le rotationnel par rapport à **r** des deux membres de cette équation en se souvenant , autre égalité , que $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{a})) \equiv \nabla(\mathrm{div}(\mathbf{a})) - \Delta(\mathbf{a})$; si **a** est identifié à $\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} \mathbf{j(r')} \right)$ l'intégrale sur le grand volume de la divergence tend vers zéro et il ne reste que l'équation voulue après utilisation des propriétés de la distribution $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$

- conséquence de la deuxième équation de Maxwell

puisque : div (**rot (vecteur)**) = 0 , après identification **vecteur = B (M)** on trouve que ⇒ div (**j**) = 0 ⇒ $\partial\rho/\partial t = 0$; c'est bien la loi de conservation des charges avec des courants permanents ; cette conséquence est cohérente avec le cadre de la magnétostatique qui préside à ces calculs .

- conséquence de div (**B**) =0

noter la différence de nature entre **B** et **E** puisque div **(B)** est toujours nulle au contraire de div **(E) ;** les propriétés déduites pour **E** du fait que div (**E**) =0 seront également valables pour **B ;** en particulier , comme il n'y a pas de charges magnétiques libres , le flux de **B** à travers une surface fermée est nul en toutes circonstances ; (en électrostatique on avait le théorème de Gauss) .

= loi d'Ampère ; propriétés globales ; comparaison avec la loi de Gauss

En appliquant en sens inverse le théorème 1 on a :

$$\int_{(\mathbf{S})} \mathbf{rot}(\mathbf{B}(\mathbf{M})) \bullet \mathbf{ds}(\mathbf{M}) = \int_{(\mathbf{C})} \mathbf{B}(\mathbf{M}) \bullet dl(\mathbf{M}) = \frac{1}{\varepsilon_0\ c^2} \int_{(\mathbf{S})} \mathbf{j}(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{ds}(\mathbf{M})$$

en d'autres termes , la circulation du champ sur le contour fermé qui limite une surface (S) est égal au flux du courant qui la traverse ; ou encore , en particularisant au cas d'un fil de courant :

$$\boxed{\int_{(C)} \mathbf{B}(\mathbf{M}) \bullet \mathbf{dl}(\mathbf{M}) = \mu_0 I}$$

c'est la loi d'Ampère ; I est la somme algébrique des courants qui traversent la surfacesur laquelle s'appuie le contour (C) .

- application : champ dans un solénoïde infiniment long parcouru par un courant I et avec un enroulement de n tours par unité de longueur :

$$\boxed{B = \frac{n\,I}{\varepsilon_0 \; c^2} = \mu_0 I\, n}$$

La démonstration est plus subtile qu'il n'y paraît car il faut considérer plusieurs applications du théorème d'Ampère sur des circuits dans et extérieurs à la bobine ; on retrouvera cette démonstration dans les cours de Deug .

Potentiel vecteur

= Définition

On appelle « potentiel vecteur » un vecteur **A (M)** tel que :

$$\boxed{\mathbf{B}\ (\mathbf{M}) = \mathbf{rot}\,(\mathbf{A}\,(\mathbf{M}))}$$

on notera que ce choix entraine , en toutes circonstances , que div (**B**) est toujours nulle ; pour autant , le choix de **A (M)** reste partiellement arbitraire puisque l' équation de définition précédente laisse div(**A**) indéterminée .

= Expression du potentiel vecteur créé par une distribution de courant

- expression différentielle (locale)

En partant de la deuxième équation de Maxwell on écrit successivement :

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{B}\,(\mathbf{M})) = \frac{1}{\varepsilon_0 \; c^2}\, \mathbf{j}\,(\mathbf{M}) \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,(\mathbf{A}\,(\mathbf{M}))) = \frac{1}{\varepsilon_0 \; c^2}\, \mathbf{j}\,(\mathbf{M}) \qquad \Rightarrow$$

$$\nabla\,(\nabla\,.\,\mathbf{A}\,(\mathbf{M}\,)\,)\,-\,\Delta\,(\,\mathbf{A}\,(\,\mathbf{M})\,)\,=\,\frac{1}{\varepsilon_0\;c^2}\,\mathbf{j}\,(\,\mathbf{M}\,)$$

tout l'art ici consiste à simplifier cette équation ; un choix possible et recommandé en magnétostatique consiste à prendre : $\nabla\,.\,\mathbf{A}\,(\,\mathbf{M}\,)\;=\mathbf{0}$ **;** on dit que l'on a fait un choix de « jauge » : c'est la jauge qui convient le mieux en magnétostatique **.** Ce choix est licite puisque la divergence du potentiel vecteur n'est pas fixée par sa définition **;** une fois ce choix effectué **, A** est alors fixé sans ambiguité et il conduit à l'équation suivante relative à **A**

$$\boxed{\Delta\,(\,\mathbf{A}\,(\,\mathbf{M})\,)\,=\,-\frac{1}{\varepsilon_0\;c^2}\,\mathbf{j}\,(\,\mathbf{M}\,)\;=\,-\mu_0\,\mathbf{j}\,(\,\mathbf{M}\,)}$$

C'est une équation vectorielle dont la forme algébrique est absolument identique à l'équation de Poisson .

- expression intégrale (ou solution de cette équation):

$$\boxed{\mathbf{A}\,(\mathbf{r}\,)\,=\,\int_{(\,V\,)}\;\mathbf{j}\;(\;\mathbf{r'}\;)\;\frac{\mu_0}{4\pi}\;\frac{1}{|\mathbf{r}\;-\mathbf{r'}|}\;dv\,(\,\mathbf{r'}\;)}$$

Telle est la solution formelle relative au potentiel vecteur **A ;** (voir analogie avec l'équation de Poisson de l'electrostatique) ; on retiendra de cette formule qu'il s'agit d'une somme vectorielle , ou plutôt , que cette équation comporte trois équations découplées qu'il faut résoudre .

On en tire quelques conséquences : si **j** à une orientation constante , **A** lui sera parallèle ; si **j** est toujours parallèle à un même plan **A** le sera également ; si **j** est toujours parallèle à une même direction , **A** sera parallèle à la même direction .

- cas particulier du fil électrique portant un courant I

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{r}\,)\,=\,\int\;I\;\frac{1}{4\pi\;\varepsilon_0\;c^2}\;\frac{1}{|\mathbf{r}\;-\mathbf{r'}|}\;\mathbf{dl}\,(\,\mathbf{r'}\,)$$

= Propriétés du potentiel vecteur ; elles résultent toutes des deux mêmes fameux théorèmes ;

- circulation de **A(M)**

$$\int_{(C)} \mathbf{A}(\mathbf{M}) \bullet \mathbf{dl}(\mathbf{M}) = \int_{(C)} \mathbf{rot}(\mathbf{B}(\mathbf{M})) \bullet \mathbf{dl}(\mathbf{M}) = \int_{(S)} \mathbf{B}(\mathbf{M}) \bullet \mathbf{ds}(\mathbf{M}) :$$

la circulation du potentiel vecteur est égale au flux de **B** à travers (S)

- conservation du flux de **A**

$\nabla . \mathbf{A}(\mathbf{M}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \text{flux}_S \ \mathbf{A} = 0$: à travers une surface fermée quelconque le flux de **A** est toujours nul car sa divergence est nulle en toutes circonstances ; (choix de jauge en magnétostatique) .

- continuité du potentiel vecteur :

cette continuité est vraie en toutes circonstances ; c'est une conséquence mathématique de l'expression de Biot et Savart

- cas particulier d'une densité superficielle de courant :

si il y a continuité du potentiel vecteur il y a discontinuité de la composante tangentielle de l'induction magnétique au travers d'une couche superficielle de courant ; (c' est la conséquence de la deuxième équation de Maxwell ; examiner ici analogie et différence avec le cas électrostatique d'une densité superficielle ou la discontinuité du champ electrique résulte de la première équation de Maxwell.) .

$$\mathbf{B}(\mathbf{M}) = \int_{(S)} \mathbf{dB}(\mathbf{M}) = \int_{(S)} \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0\ c^2} \frac{1}{|\mathbf{M'} - \mathbf{M}|^3} \mathbf{j}_S(\mathbf{M'}) \times (\mathbf{M} - \mathbf{M'}) ds(\mathbf{M'})$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{n}(\mathbf{M}) \bullet \left[\mathbf{B}_+(\mathbf{M}) - \mathbf{B}_-(\mathbf{M})\right] &= 0 \\ \mathbf{n}(\mathbf{M}) \times \left[\mathbf{B}_+(\mathbf{M}) - \mathbf{B}_-(\mathbf{M})\right] &= \frac{1}{\varepsilon_0\ c^2} \mathbf{j}_S(\mathbf{M}) \end{aligned}}$$