le dipôle magnétique ; circuit électrique dans un champ magnétique ; travail des forces

= moment magnétique d'une spire

On cherche ici à calculer le champ créé par une petite spire circulaire plate , parcourue par un courant I , placée à l'origine des coordonnées ; un point de cette spire est noté **r'.** Comme dans le cas du dipôle électrique , on se place loin de l'origine , à une distance **r ,** avec $| \mathbf{r'} | \ll | \mathbf{r} |$ **.** On calcule d'abord le potentiel vecteur après avoir utilisé la formule de Taylor suivante :

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} = \frac{1}{r} - \mathbf{r'} \bullet \nabla \left| \frac{1}{r} \right| + \ldots \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{(C)} I \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \left(\frac{1}{r} - \mathbf{r'} \bullet \nabla \left| \frac{1}{r} \right| + \ldots \right) \mathbf{dr'}$$

dans cette intégrale le premier terme est nul sur un circuit fermé (la spire); le deuxième terme de l'intégrale s'exprime plus facilement en utilisant l'égalité vectorielle suivante :

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} . \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} . \mathbf{b})\, \mathbf{c}$$

où l'on identifie : $\mathbf{a} = \nabla \left(\frac{1}{\mathbf{r}} \right)$ $\mathbf{b} = \mathbf{dr'}$ $\mathbf{c} = \mathbf{r'}$ moyennant quoi :

$$\mathbf{dr'}\, (\mathbf{r'} . \mathbf{a}) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{d}(\mathbf{r'}\, (\mathbf{a} . \mathbf{r'})) + \mathbf{a} \times \mathbf{dr'} \times \mathbf{r'} \right]$$

De plus la géométrie établit sans peine que :

$$\int_{(C)} \mathbf{r'} \times \mathbf{dr'} = 2\, \mathbf{n}\, S$$

où S est la surface de la spire , **n** la perpendiculaire à la spire ; de tous ces intermédiaires on déduit la formule essentielle :

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left| \frac{1}{\mathbf{r}} \right| \times \mathbf{n}\, S}$$

on pose : I S **n** = **m** où **m** est le moment magnétique ou "dipôle de la spire" ; soit encore :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Cette formule est très analogue à celle du dipôle électrique , sinon qu'un produit vectoriel remplace un produit scalaire dans l'expression des potentiels respectifs ; pour ce qui est de la dépendance du potentiel vecteur à l'infini de la spire , elle est identique à celle du potentiel électrique engendré par un doublet de charges électriques : la décroissance est en $\frac{1}{r^2}$. De plus le résultat n'est pas dépendant de la forme exacte de la spire pourvu qu'elle soit plate .
Les composantes de **B** sont analogues à celles du dipôle électrique soit en coordonnées cartésiennes :

$$B_z = \frac{m}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \qquad B_y = \frac{m}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{3\,zy}{r^5} \qquad B_x = \frac{m}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{3\,zx}{r^5}$$

: application numérique intelligente : calculer le moment magnétique d'un atome d'hydrogène où l'électron gravite autour du noyau sur une orbite stable d'un rayon de 0.5 angström ; puis à la suite du prochain paragraphe , calculer son énergie dans un champ extérieur de 0.3 T .
: montrer encore que pour un atome , si Q est la charge et M la masse de l'électron qui gravite autour du noyau sur une orbite stable , on relie **m** à **l** le moment cinétique orbital par la relation :

$$\mathbf{m} = \frac{Q}{2M}\,\mathbf{L}$$

Pour continuer la liaison avec le cours d'introduction à la mécanique quantique , on verra que ce modèle n'exprime pas le moment magnétique interne de l'électron , ou « spin » ; il s'en faut d'un facteur légèrement supérieur à 2 si l'on remplace **L** par **S** , moment cinétique orbital de spin de spin ; ce facteur se nomme facteur gyromagnétique g ; g=2,OO232 ; c'est le résultat d'effets relativistes et quantiques

- on a exprimé le dipôle d'une spire de courant dans un fil ; on peut généraliser sans difficulté une formule analogue lorsque l'on rencontre une distribution de densité de courant existant dans un espace limité par une surface (S) et que l'on cherche ce potentiel vecteur à un distance r>>r' . En effet si on développe :

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r.r'}}{r^3} + \ldots$$

$$\mathbf{A(r)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\int \mathbf{J(r')}dv(r') + \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,.\int \mathbf{r'}\right)\mathbf{J(r')}\,dv(\mathbf{r'}) + \ldots\right]$$

On utilse une astuce du type :

$$\nabla.(fg\mathbf{J}) = g\,\nabla.(f\mathbf{J}) + gf\nabla.\mathbf{J} + g\mathbf{J}.\nabla f$$

or l'intégrale du premier membre est nulle pour une surface étendue à l'infini ; comme par ailleurs : $\nabla.\mathbf{J}=0$ puisque l'on est en statique , on peut utiliser deux fois la formule :
si on choisit f=1 et $g = x'_i$ cela permet de déclarer nul la première contribution à **A(r)**
si on choisit $f=x'_i$ et $g = x'_j$ on en déduit :

$$\mathbf{A(r)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{\mathbf{r}}{r^3}\ \mathbf{x}\int[\,\mathbf{r'}\ \mathbf{x}\ \mathbf{J(r')}\,]\,dv(\mathbf{r'})$$

ce qui permet de généraliser la notion de moment magnétique à une distribution de courant :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int[\,\mathbf{r'}\ \mathbf{x}\ \mathbf{J(r')}\,]\,dv(\mathbf{r'}) \quad \text{--->} \qquad \mathbf{A(r)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \frac{\mathbf{m\ x\ r}}{r^3}$$

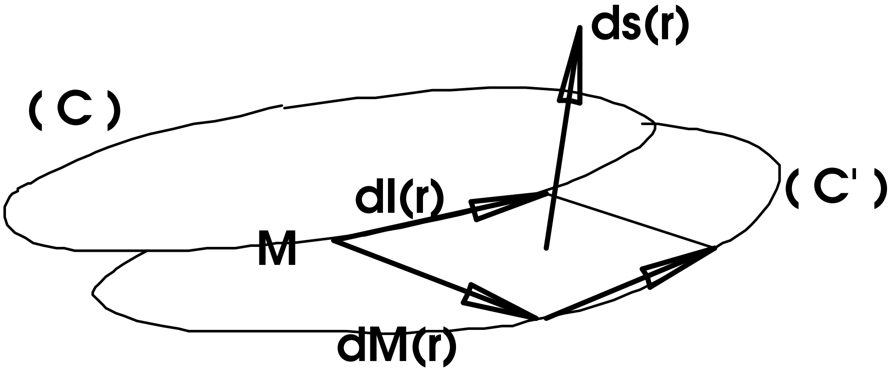
= forces exercées sur une spire de courant placée dans un champ extérieur (*première expérience magnétique*)
.
- on place d'abord une spire quelconque de pourtour (C) parcourue par un courant I dans un champ magnétique extérieur produit par des sources qui assurent que ce champ est constant quels que soient les déplacements de la spire .

Pour un déplacement infiniment lent quelconque **dM (r)** de chaque élément d**l (r)** de la spire de point courant **r** , il y a un travail des forces "exercées" de Lorentz **f (r)** qu'il faut équilibrer par des forces "appliquées" extérieures [- **f (r)]** ; le travail mécanique des forces appliquées extérieures est alors :

$$(dw^{ext}_{mec}) = [\,-\mathbf{f(r)}\,].\,\mathbf{dM(r)} = -[\,I\ \mathbf{dl(r)}\ \mathbf{x}\ \mathbf{B(r)}\,].\mathbf{dM(r)} = -\,dW$$

Les déplacements **dM(r)** étant effectués , le contour de la spire est devenu (C') .
Il n'est pas difficile de voir que (dw^{ext}_{mec}) peut se mettre sous une forme plus « physique » :

$$(dw^{ext}_{mec}) = -\,I\,[\,\mathbf{dM(r)}\ \mathbf{x}\ \mathbf{dl(r)}\,]\,.\,\mathbf{B(r)}$$



où le vecteur entre crochets est un élément de surface porté par un vecteur normal à **dM** et **dl** en **r** ; c'est la normale orientée à une surface élémentaire délimitée par les deux contours (C) et (C') ; ainsi (dw_{mec}^{ext}) est proportionnel à **[dM(r) x dl(r)] . B(r)** , quantité que l'on appelle le "flux coupé" lors du déplacement de la spire dans le champ magnétique extérieur ! :

$$(dw_{mec}^{ext} = - I \ (d\Phi_{coupe}) = -dW$$

: réciproquement , les forces mécaniques , comme les couples , qui s'exercent sur un fil peuvent se déduire de la variation de la fonction ($d\Phi_{coupé}$) ;

: autre remarque : les forces **f (r)** ayant toujours tendance à effectuer spontanément un travail positif , si rien ne s'oppose au mouvement de la spire , il y aura déplacement et déformation spontannés de manière à augmenter le flux qui la traverse **;**

: dernière remarque : pour toute évolution macroscopique à courant constant :

$$(\Delta\, w_{mec}^{ext} = - I \ (\Delta\, \Phi)_{coupe} \ ;$$

en particulier , si la position initiale de la spire est infiniment éloignée de la source de champ extérieur $w_{mec}^{ext} = - I \quad \Phi$ puisque le flux dans la position initiale (C) de la spire est nul .

= retour sur le " flux coupé"

- Soit un champ extérieur . Considérons une spire (C) de surface (S) orientée par le sens du courant qui la parcourt ; voisin de celle ci , soit une deuxiéme spire (C') de surface (S') , parcourrue par le même courant , qui se déduit de (C) par continuité : tout point **M (r)** de (C) engendre un point **M'(r')** de (C') de sorte que :

M'(r') = M(r) + dM(r)

Dans ce déplacement , les points du contour (C) ont engendré une surface (L) (la lettre L est utilisée ici pour symboliser le mot « Latérale ») dont l'élément d'aire est :

ds (r) = dl(r) x dM(r)

ds est orientée par le sens du courant **dl(r)** et par les déplacelments élémentaires **dM(r)** ; (voir le dessin ci dessus) .

On appelle « flux coupé » le flux du champ extérieur **B** à travers la surface (L) ainsi orientée ; on a démontré plus haut que $dW_{mec}^{ext} = - I \ d\phi_{coupe}$.

- Supposons que le circuit (C) se trouve au départ à l'infini , dans une zone où le champ magnétique est nul ; le flux à travers (S) est nul ; puis on déplace le circuit jusqu'en (C') : (S) -> (S') ; il a engendré dans ce déplacement une grande surface latérale (L) .
En raison de la loi div(**B**)=0 le flux à travers la surface fermée et orientée (S)-(S')+(L) est nul (on a pris soin de compter négativement la surface (S') parce que le sens de sa normale est déterminé par celui de (S)).

Comme par hypothèse le flux à travers (S) est nul , le flux coupé à travers (L) est égal au flux qui traverse (S') .

= travail des forces électriques

Mais dans une évolution réelle à courant constant les forces mécaniques ne sont pas les seules à travailler : la pile , elle aussi , doit « travailler » ; en effet si le fil se déplace de **dM (r)** en entrainant avec lui les porteurs de charge , dans le champ extérieur , ces charges sont soumises à une force de Lorentz parallèle au fil qui devrait modifier leur mouvement et donc le courant I ; afin d'assurer sa stabilité , la pile doit travailler « électriquement » .

On va montrer avec un modèle simple que dans cette transformation le travail électrique de la pile dW_{elec} qui assure un courant constant est tel que :

$$dW_{elec} = -\, dW_{mec}^{ext}$$

Soit donc un brin de circuit que l'on déplace d'un quantité dM dans le sens des x croissants ; le champ B est supposé perpendiculaire au plan du circuit ; l est la longueur du brin déplacé , S la surface de la section droite du brin , et n la densité de charges q par unité de volume .

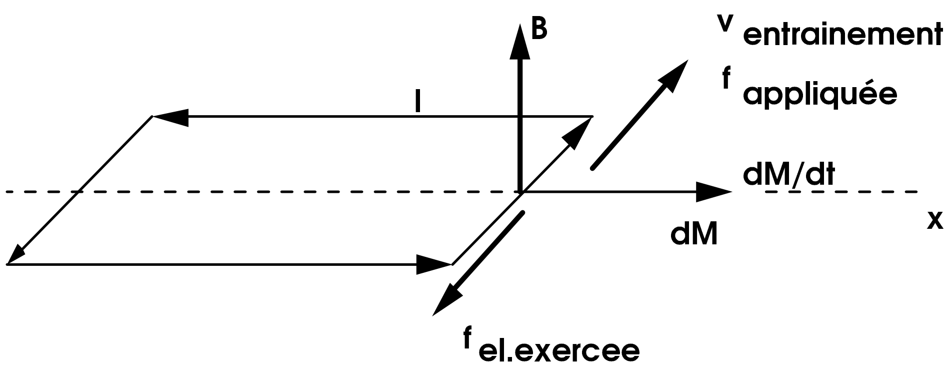
$$dW_{mec}^{ext} = -\, I\ d\Phi_{coupe} = -\, I\ B\ l\ dM$$

Par ailleurs le déplacement du brin se fait dans le temps dt et

$$dM = \frac{dM}{dt}\, dt$$

du fait de cette vitesse de déplacement parallèlement à x, une force de Lorentz $f_{el\,-\,exercee}$ s'exerce sur chaque porteur de charge dans une direction antiparallèle au courant I .

$$f_{el\,-\,exercee} = q\ B\ \frac{dM}{dt}$$



Or au repos , c'est à dire sans déplacement du brin , les porteurs q se déplacent dans le fil avec la vitesse constante $v_{entr.}$ de sorte que :

$v_{entr.}\ qnS = I$

n est le nombre de porteurs par unité de volume et S la surface droite du fil .
Demander que I soit constant , cela veut dire qu'il faut appliquer à chaque porteur une force opposée à $f_{el - exercee}$; elle va travailler puisque q se déplace : c'est l'origine de dW_{elec}

dW_{elec} =($f_{el - exercee}$ sur une charge)(déplacement dans dt) (nombre de charges concernées) =

$(q\ B\ \frac{dM}{dt})\ (v_{entr.} dt\ )\ (nSl) = -dW_{mec}^{ext}$

$$\boxed{(dW_{electrique}) = [-\ (dw_{mec}^{ext})]}$$

Ainsi le travail total (électrique +mécanique) fait par les « forces extérieures » qui s'exercent sur ce seul circuit est nul .

Attention : ceci est un bilan qui ne concerne que la spire ; au cours de ce déplacement les sources de courant qui imposent le champ magnétique extérieur constant ont peut être « travaillé » ; mais comme souvent en thermodynamique , on découpé ici dans « l'univers » une petite partie : le "premier principe" a été appliqué à la spire seule . Bref , pour la spire :

$$\boxed{dU = (dW)total_{exterieur} = (dw_{mec}^{ext}) + (dW_{electrique}) = 0}$$

= énergie du dipôle magnétique dans un champ extérieur (*deuxième expérience magnétique)*

On fait ici la même analyse que dans le cas du dipole électrique .

Dans le cas particulier d'un dipôle magnétique indéformable on sait calculer le flux Φ du champ extérieur qui le traverse :

$\Phi = \int_{(S)} \mathbf{B.ds}$ de sorte que :

$(dw_{mec}^{ext}) = -\ I\ d\Phi = d\ (-\ \mathbf{B.m}) = dU$

: le dipôle (m = constante car I=constante) tend donc à s'aligner le long du champ extérieur ;
: il est soumis à un couple **C = m x B** ;
: si le champ **B** n'est pas uniforme il est soumis à une force $\nabla(\mathbf{m.B})$

: dans le champ extérieur si aucune force mécanique extérieure ne s'oppose au mouvement de la spire on a seulement :
d U = - d (**B.m**)
c'est à dire : U = - **B.m**
ainsi la situation d'énergie minimum correspond au dipôle aligné le long du champ magnétique (comme en électrostatique) ;
: plus généralement , pour un circuit quelconque , le champ extérieur tend à le faire tourner de manière à ce que le flux qui le traverse soit maximum .

Note essentielle relative à tout ce paragraphe : l'énergie U que l'on vient de calculer est celle du dipôle dans le champ extérieur , à courant constant : **m** et **B** constants .