Energie magnétique d'une distribution de champ

= cas d'un circuit quelconque isolé ; self-induction

Dans toutes les formules de la magnétostatique , **A** et **B** sont proportionnels au courant I , constant , qui parcourt un circuit ; le flux du champ à travers ce circuit , qui est proportionnel à **B** sera donc aussi proportionnel à I . On écritra par définition : $\Phi = L\,I$.
L est un coefficient qui ne dépend que de la forme géométrique du circuit ; on le nomme « coefficient de self-induction » ; son calcul , pour une géométrie donnée , se fait très bien par ordinateur avec des codes d'usage industriel fréquent .
La variation totale de Φ s'écrit donc :

$$d\Phi = L\,dI + I\,dL$$

le premier terme donne l'accroissement du flux à géométrie fixe et le deuxième provient de la déformation du circuit à courant constant .
Le problème demeure : quelle est l'énergie magnétique propre de ce circuit quand on a porté la valeur du courant de 0 à I ; réponse impossible tant que l'on ne connait pas les lois de l'inductuion . A moins de tenir le raisonnement en chaine ci dessous .

= cas de deux circuits ; coefficient de mutuelle (*troisième expérience magnétique*)

Considérons maintenant deux circuits 1 et 2 , chacun à géométrie fixe , parcourus par des courants I_1 , I_2 , reliés à des piles qui assurent que ces courants soient constants ; paradoxalement on va voir que l'on peut exprimer facilement leur « énergie d'interaction magnétique » .

- coefficient de mutuelle

On désigne par Φ_1 le flux induit par 2 qui traverse le circuit 1 ; de même pour le circuit 2 .
Parce que le potentiel vecteur en 1 est linéaire en I_2 , on aura $\Phi_1 = M_{21}\, I_2$; de même $\Phi_2 = M_{12}\, I_1$

M est le « coefficient d'induction mutuelle » de 1 sur 2 ; il est égal à celui de 2 sur 1 et s'exprime , pour des circuits filiformes , en explicitant la formule de définition :

$$\boxed{M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C_1 C_2)} \frac{\mathbf{dl_1(r_1) \cdot dl_2(r_2)}}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|}}$$

: remarque : on voit bien sur cette formule qu'il y aurait grande difficulté mathématique à l'utiliser en identifiant les deux circuits pour exprimer la self : cette fonction n'est pas définie pour $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$.

- calcul de l'énergie magnétique d'interaction entre les deux circuits

Supposons que l'on déplace le circuit 1 dans le champ de 2 , pour I_1 , I_2 constants , en laissant 2 en position fixe , jouant le rôle de champ extérieur pour 1 ; on a :

$$(dW\,1_{exterieur}) = (dw1^{ext}_{mec}) + (dW\,1_{electrique}) = 0$$

Supposons maintenant qu'en laissant 1 fixe on déplace 2 de manière que son déplacement soit l'inverse de celui imposé précédemment à 1 : au terme de chaque déplacement la position relative des deux circuits est identique ; on a aussi :

$$(dW\,2_{exterieur}) = (dw2^{ext}_{mec}) + (dW\,2_{electrique}) = 0$$

Grâce au principe de l'action et de la réaction :

$$(dw2^{ext}_{mec}) = (dw1^{ext}_{mec})$$

Si on maintenant évalue $(dW\,total_{\,exterieur})$ travail effectué sur les deux circuits dans leur déplacement réciproque , il est évident qu'il ne faut pas compter deux fois la partie mécanique ;

$$\begin{aligned}(dW\,total_{\,exterieur}) &= (dw1^{ext}_{mec}) + (dW\,1_{electrique}) + (dW\,2_{electrique}) \\ &= -(dw2^{ext}_{mec}) \\ &= -1/2\ [(dw2^{ext}_{mec}) + (dw1^{ext}_{mec})] \\ &= +1/2\ [(dW\,1_{electrique}) + (dW\,2_{electrique})\ ]\end{aligned}$$

Ou encore , si les positions initiales sont celles de deux circuits très éloignés :

$$\begin{aligned}U^{int}_{mag} = W_{total\ exterieur} &= 1/2\,(W1_{electrique} + W2_{\,electrique}) \\ &= 1/2\,(I_1\phi_1 + I_2\,\phi_2)\end{aligned}$$

Φ_1 étant le flux créé à travers 1 par 2 , ou encore :

$$W\,total_{\,exterieur} = 1/2\,[\ I_1 \int_{(C_1)} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{dl}_1 + I_2 \int_{(C_2)} \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{dl}_\mathbf{2}\ ]$$

La quantité ci dessus est le travail total qu'il faut effectuer pour amener ces deux circuits parcourus par des courants donnés depuis l'infini jusqu'à leur configuration spatiale finale ; c'est leur énergie d'interaction magnétique .

En termes de mutuelle on écrira aussi :

$$W\ total_{\ exterieur} = M_{21}\ I_2\ I_1 = U_{int\,er.mag.}$$

On généralise cette formule au cas de n circuits en gardant toujours le facteur 1/2 pour ne pas compter deux fois les paires :

$$U_{int\,er.mag.} = 1/2 \sum_{i \neq j} M_{i,j}\ I_i\ I_j = \sum_{i > j} M_{i,j}\ I_i\ I_j$$

.

- cas d'un seul circuit quelconque ; self énergie magnétique *(quatrième expérience magnétique)*

Sachant que le brin unique d'un circuit filiforme se décompose en un faisceau de filaments élémentaires de courants on a le droit de considérer chacun comme un circuit élémentaire ; la formule précedente se généralise , sans ennuis « mathématiques » sous la forme :

$$(\ W\ total_{\ exterieur}\ ) = \frac{1}{2} \int_{(\ V\ )} \mathbf{A}\,(\,\mathbf{r}\,)\,.\,\mathbf{j}\,(\,\mathbf{r}\,)\ dv(\ \mathbf{r}\ )$$

Il s'agit bien cette fois de la self énergie magnétique totale du circuit $U_{self.mag.}$, énergie nécessaire pour assembler les filaments élémentaires en un brin unique .

En revenant à la définition de la self , cette quantité est aussi :

$$(\ W\ total_{\ exterieur}\ ) = \frac{1}{2}\ L\ I^2 = U_{self.mag.} = \frac{1}{2}\ \Phi\ \ I$$

Pour achever le calcul et lui donner une forme similaire à celle de l'électrostatique on utilise l'égalité vectorielle :

rot (b) . a = **b . rot (a)** - div (**b x a**)

on identifie **j (r)** avec **rot (b)** et **a** avec **A (r)** ; le terme en div ( ) est nul car les limites du volume doivent être reportées à l'infini et le résultat est :

$$U_{totale\ mag.} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{(\ \mathbf{V}\ )} B^2\,(\,\mathbf{r}\,)\ dv\,(\,\mathbf{r}\,)$$

la densité d'énergie par unité de volume s'en déduit :

$$\rho_E(\mathbf{r}) = \frac{B^2(\mathbf{r})}{2\mu_0}$$

- retour sur le cas de n circuits en interaction

Pour exprimer l'énergie totale magnétique de n circuits en interaction il reste à assembler les self-énergies et l'énergie d'interaction en comptant correctement les circuits ou les flux ; si Φ_i est cette fois le flux total qui traverse le circuit i (flux du circuit i et de tous les autres) l'énergie magnétique totale sera :

$$U_{\text{totale mag.}} = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i \; I_i$$

Les remarques suivantes s'imposent :

: cette quantité a une forme analogue à celle rencontrée en electrostatique :

$$U_{\text{totale el.stat.}} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \; V_i$$

: sous cette forme , c'est aussi une quantité intégrée ; elle a une différentielle totale , les flux et les courants étant des grandeurs indépendantes :

$$dU_{\text{totale mag.}} = \frac{1}{2} \sum_i (I_i \; d\Phi_i + \Phi_i \; dI_i)$$

: dans une telle transformation , on l'a montré , le travail des forces électiques est :

$$dW_{\text{electrique}} = \sum_i I_i \; d\Phi_i$$

: le travail des forces mécaniques sera donc :

$$dw_{\text{mec}}^{\text{ext}} = dU_{\text{totale mag}} - dW_{\text{electrique}} = \frac{1}{2} \sum_i (\phi_i \, dI_i - I_i \, d\phi_i)$$

; cas particulier : transformation à courant constant pour un seul circuit :

$$dw_{\text{mec}}^{\text{ext}} = -\frac{1}{2} I \, d\phi = -\frac{1}{2} I^2 \, dL$$

La conclusion est instructive : l'action d'un circuit sur lui-même tent à augmenter le coefficient de self induction : une spire isolée tend à se dilater , un solénoïde tend à se raccoucir à diamètre constant .