Chapitre II

L'électromagnétisme : les équations de Maxwell dans le vide
Ondes électromagnétiques .

C'est avec ce chapitre que commence vraiment le cours ; après avoir établi les équations de Maxwell , le chapitre comprend une description des ondes électromagnétiques et dans une deuxième partie quelques applications de ces notions générales . En particulier on a développé cette année les interactions entre le champ électromagnétique et une particule chargée ; c'est un passage obligé pour les physiciens et le mot "application" ne signifie nullement que ces paragraphes sont d'un intérêt secondaire . Ils doivent être reliés au cours d'introduction à la mécanique quantique .

I) Le phénomène physique d'induction

Le chapitre précédent traitait des phénomènes statiques : le champ **B** était produit par un courant invariant dans le temps ; et si le phénomène « courant » implique bien un mouvement de charges , il s'agissait d'un « courant permanent » .

Le phénomène d'induction sort de ce contexte au sens où certaines grandeurs dépendront explicitement du temps (les potentiels V **, A** , les champs **E , B** , les courants **j**) ; on cherchera à les relier entre elles sans introduire de grandeurs nouvelles ; après une longue démarche on obtiendra les équations de Maxwell les plus générales dans le vide , celles qui régissent l'électromagnétisme et l'optique .

= Description d'une expérience fondatrice : le « flux coupé »

- point de vue macroscopique

On considère une spire qui se déplace dans un champ extérieur constant **B**. Le flux magnétique Φ (**t**) à travers la spire est , à chaque instant :

$$\Phi(t) = \int_{(S(t))} \mathbf{B}(\mathbf{r}) . \mathbf{ds}(\mathbf{r})$$

: en circuit ouvert l'expérience montre qu'aux bornes de la spire prend naissance une "force contre-électromotrice " ou tension électrique qui vaut :

$$e_{\text{e.m.}} = -\frac{d\phi(t)}{dt}$$

le signe " - " signifie que la "force contre-électromotrice " a tendance à créer dans le circuit un courant dont le sens engendrerait lui-même un flux s'opposant à celui résultant du déplacement de la spire : la f.c.e.m. s'oppose au déplacement dans le fil des charges libres , déplacement qui résulterait de la loi de Lorentz . Il n'y a pas de travail ou d'énergie échangés dans cette opération car il n'y a justement pas de courant qui circule dans la spire ; contrairement au nom qui lui est traditionnelement donné la f.c.e.m. n'est pas une force mécanique mais une grandeur homogène à un potentiel électrique .

: en circuit fermé , c'est à dire lorsqu'il y a une impédance finie aux bornes de la spire , par exemple un ampèremètre , un courant I circule dans la spire ; il est déterminé par l'impédance du circuit total et par la même f.c.e.m. ; il y a un travail échangé entre le système et l'observateur puisque il serai bien étonnant que le circuit n'ait pas de résistance : il faut compenser les pertes par effet Joule .

- expérience "réciproque"

L'expérience réciproque consiste à garder un circuit fixe dans un champ magnétique variable . Faraday , le premier , a montré que la règle du flux variable énoncée au paragraphe précédent reste valable ; le fait de faire varier dans le temps la quantité **B**(t) n'induit pas de force nouvelle sur une particule chargée autre que celle que l'on connait : la force de Lorentz ; l'équation de Faraday qui rend compte des phénomènes d'induction s'énonce ainsi :

$$\boxed{\mathbf{rot}\,(\mathbf{E}) = -\frac{\partial\ \mathbf{B}}{\partial t}}$$

En effet , en exprimant le flux du rotationnel de **E** à travers la spire et en utilisant l'un de nos deux (fameux) théorèmes on retrouve bien la loi de l'induction :

$$\int_{(C)} \mathbf{E}\,.\,\mathbf{dl} = \int_{(S)} \mathbf{rot}\,(\mathbf{E}).\,\mathbf{ds} = \int_{(S)} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right).\ \mathbf{ds} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{flux}_{(S)}\ (\mathbf{B})\right) = e_{\text{e.m.}}$$

= inductance mutuelle

On considère deux circuits , 1 et 2 en interaction magnétique ; la tension induite aux bornes de 2 quand le courant varie dans 1 est :

$$\boxed{e_2 = M_{21}\frac{dI_1}{dt}}$$

on connait l'expression générale de cette mutuelle (voir chapitre précédent) .

Dans le cas général on écrira deux équations linéaires , conformes aux lois de l'induction qui relient courants et forces contre-électromotrices dans les deux circuits sous la forme :

$$e_1 = M_{11}\frac{dI_1}{dt} + M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

$$e_2 = M_{12}\frac{dI_1}{dt} + M_{22}\frac{dI_2}{dt}$$

Ces relations indiquent seulement que le flux du champ magnétique dans un circuit résulte du courant qui passe dans les deux circuits.

Pour un seul circuit la self-inductance est une quantité positive , définie par la relation : $L = - M_{11}$

$$\boxed{e_{em} = -L\frac{dI}{dt}}$$

= La dernière équation de Maxwell

On a vu en magnétostatique que l'existence du champ **B (r)** est associée , nécessairement , à la présence de courants permanents **j (r') ;** on a souligné aussi que la loi de Biot et Savart entraînait la loi « locale » :

$$\mathbf{rot\,(\,B\,(\,M\,)\,)} = \frac{1}{\varepsilon_0 \, c^2}\,\mathbf{j\,(\,M\,)} = \mu_0\,\mathbf{j\,(\,M\,)}$$

C'est cette loi que Maxwell met en cause dans le cas où les courants évoluent dans le temps ; il repère en effet une contradiction qu'il s'efforce de lever en modifiant l'équation précédente de manière « ad hoc » ; et ce qui apparaît à ce stade comme « bien vu » est justifié par des arguments plus généraux de symétrie et plus forts aux yeux du physicien moderne .

- la contradiction

Si l'on prend la divergence des deux membres de l'équation précédente , il en résulte nécessairement que div (**j**) est nul puisque la divergence d'un rotationnel est toujours nulle ; or , justement , si les courants varient dans le temps la conservation des charges impose :

$$\mathrm{div}\,(\,\mathbf{j}\,(\,\mathbf{M}\,)\,) = -\,\frac{\partial\rho(\mathbf{M})}{\partial t}$$

De manière évidemment très « empirique » , encore qu'il en ait donné des « justifications » , Maxwell proposa de lever cette difficulté en introduisant dans l'équation de la magnétostatique un terme supplémentaire : $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}\,(\,\mathbf{M}\,)}{\partial \mathbf{t}}$ qui se nomme souvent « courant de déplacement » .

$$\boxed{\mathbf{rot}\,(\,\mathbf{B}\,(\,\mathbf{M}\,)\,) = \mu_0\,[\;\mathbf{j}\,(\,\mathbf{M}\,)\; + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}\,(\,\mathbf{M}\,)}{\partial \mathbf{t}}\;]}$$

Pour nous , ce qui importe , c'est d'abord que cette équation rende bien compte de la réalité (c'est le cas) et qu'on sache lui trouver une justification plus fondamentale dans la perspective de la physique « actuelle » (relativité et mécanique quantique).

Retenons pour la petite histoire de la physique que , jusqu'au début du XX ième siècle , on a très bien vécu sans ces justifications et que toutes les conséquences de ces équations ont été tirées dans le cadre des théories alors en vigueur : les théories ondulatoires appuyées sur la mathématique des équations différentielles .

Pourquoi le terme supplémentaire permet-il de lever la contradiction ? Parce qu'en prenant la divergence de l'équation nouvelle on a :

$$0 = \;\mathrm{div}\,(\,\mathbf{j}\,(\,\mathbf{M}\,)\,) + \varepsilon_0\;\;\mathrm{div}\,\Big(\frac{\partial \mathbf{E}\,(\,\mathbf{M}\,)}{\partial t}\Big)$$

en permutant dans le dernier terme les deux dérivations et en utilisant la première équation de Maxwell de l'électrostatique , on aboutit justement à l'équation de conservation des charges . Ainsi tout est bien qui finit bien ; les équations de Maxwell ainsi corrigées apparaissent correctes et suffisantes pour expliquer quantitativement tous les phénomènes statiques et dynamiques .

L'état des lieux

On se propose ici de faire un bilan des équations qui régissent l'électromagnétisme , équations qui ont été « justifiées » jusqu'à maintenant en les classant non par ordre d'importance mais en regroupant des équations « locales » , des bilans et des relations intégrales .Ces résultats doivent être connus par coeur , pour une fois !

= lois élémentaires

La première est la loi de Lorentz ; c'est une définition simultanée de la charge électrique et des deux champs **E** et **B** qui agissent sur cette charge dans le vide

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

On doit ajouter à cette équation une équation locale de conservation des charges , principe de physique jamais mis en cause :

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}(\mathbf{M})) = -\partial\rho(\mathbf{M})/\partial t$$

= Les quatre équations de Maxwell (cette « bande des quatre » mérite considération et respect !)

Ces équation sont toujours vraies ; elles régissent les phénomènes statiques et les phénomènes dynamiques ; elles couplent champ électrique et champ magnétique par des équations différentielles « locales »

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{M})) = \frac{\rho(\mathbf{M})}{\varepsilon_0}$$ (loi de Gauss , existence de charges libres)

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{M})) = -\frac{\partial\ \mathbf{B}(\mathbf{M})}{\partial t}$$ (loi de Faraday pour les phénomènes d'induction)

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}(\mathbf{M})) = 0$$ (toujours vraie car il n'y a pas de charge magnétique libre)

$$\mathbf{rot}(\mathbf{B}(\mathbf{M})) = \mu_0 \left[\ \mathbf{j}(\mathbf{M}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{M})}{\partial \mathbf{t}}\ \right]$$ (dernière des équations « corrigée »)

= lois de conservation globales

Ces lois ne résultent que de la forme différentielle des équations de Maxwell et des propriétés mathématiques des divergences et des rotationnels ;

$$\text{flux}_{(S)}(\mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\,[\text{ somme des charges dans (S) }]$$ (Théorème de Gauss)

$$\text{circulation}_{(C)}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\,[\text{ flux}_{(S(C))}(\mathbf{B})\,]$$ (Loi de l'induction)

$$\text{flux}_{(S)}(\mathbf{B}) = 0$$ (pas de charge magnétique libre)

$$c^2\,[\text{ circulation}_{(C)}(\mathbf{B})] = \frac{1}{\varepsilon_0}\,(\text{somme des courants à travers la spire}) + \frac{\partial}{\partial t}\,[\text{ flux}_{(S(C))}(\mathbf{E})\,]$$

(Théorème d' Ampère et conservation des charges électriques)

Forme potentielle des équations de Maxwell

En principe , les équations différentielles de Maxwell qui régissent les champs **E** et **B** suffisent à résoudre tout problème d'électromagnétisme , quand on leur ajoute des conditions aux limites convenables . Toutefois , dans divers exercices , on a remarqué que l'introduction des potentiels V ou **A** pouvait être un intermédiaire profitable de calcul et non une complication ; c'est affaire de circonstance , comme souvent en physique .

Mais nous avons manipulé ces potentiels dans le seul cas de la statique ; on veut maintenant généraliser leur emploi au cas électromagnétique ; au terme de ce travail , on en déduira les caractéristiques physiques de la propagation d'une onde électromagnétique .

Dans ce paragraphe , on considère que les champs comme les potentiels sont des fonctions des variables (**r** , t) , que ces grandeurs sont dérivables et « sympatiques » du point de vue du physicien , c'est-à-dire sans discontinuités graves .

= forme potentielle des équations de Maxwell

- Statique ou pas statique , la divergence de **B** est toujours nulle : c'est encore lié au fait qu'il n'y a pas de monopôle magnétique ; cette remarque mérite quelque développement . En effet comme le dipôle élémentaire , la spire , n'est au bout du compte constitué que d'un assemblage de charges en mouvement , cela induit l'idée que les propriétés magnétiques ne sont que des propriétés "dérivées" de celle de charge en mouvement . S'il fallait poser la question :

qu'est-ce qui est le plus fondamental , la réponse serait : les champs électriques et les charges . C'estcetteréponse que l'on justifie pleinement quand on fait un début de relativité .

Si div (**B**) =0 , on a le droit d'écrire que :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\,(\mathbf{A})$$

mais cette relation laisse une certaine liberté pour choisir **A** ; en effet , si à **A** on ajoute le gradiant de n'importe quelle fonction f (**r** , t) , **B** reste inchangé . On a donc la liberté de prendre :

$$\mathbf{A} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}'$$

- introduisons maintenant dans l'équation de Faraday la relation entre **B** et **A** :

$$\mathbf{0} = \mathbf{rot}\,(\mathbf{E}) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}$$

On se souvient qu'en électrostatique nous avions choisi d'écrire que $\mathbf{E} = -\nabla V$ puisque **E** était sans rotationnel ; cette fois ci nous définirons , pour les mêmes raisons :

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

(Le potentiel V choisi ici n'est pas celui de l'électrostatique , mais il s'y ramène lorsque rien ne change dans le temps .)

- Si on effectue maintenant la transformation de **A** en **A'** , **B** reste bien invariant mais pas **E** , ce qui n'est pas "physique" ; pour palier cette difficulté , il faut imposer une contrainte sur V que l'on trouve ainsi :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V = -\frac{\partial\,[\,\mathbf{A}' - \mathbf{grad}\,(f)\,]}{\partial t} - \mathbf{grad}\,(V) = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \mathbf{grad}\left(V - \frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

La conclusion est simple : si l'on passe de **A** à $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r}, t)$, pour ne changer ni **E** ni **B** on doit simultanément changer V en $V' = V - \dfrac{\partial f}{\partial t}$

- revenons alors aux équations de Maxwell non encore utilisées

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \operatorname{div}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V\right) = -\Delta V - \frac{\partial(\operatorname{div}(\mathbf{A}))}{\partial t}$$

La première relation entre **A** et V qui en résulte sera :

$$-\Delta V - \frac{\partial(\operatorname{div}(\mathbf{A}(\mathbf{M})))}{\partial t} = \frac{\rho(\mathbf{M})}{\varepsilon_0}$$

Elle est peu sympathique car elle couple **A** et V ; on aimerait pour la simplicité des calculs ultérieurs séparer ces grandeurs . Par ailleurs

$$\mathbf{rot}(\mathbf{B}(\mathbf{M})) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{M})}{\partial t} =$$

$$= \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{A})) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}(V)\right]$$

$$= -\Delta \mathbf{A} + \mathbf{grad}(\operatorname{div}(\mathbf{A})) + \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{grad}(V))\right]$$

C’est cette équation que l’on peut grandement simplifier en bénéficiant de la liberté de choisir div (**A**) comme l’on veut . En effet , si l'on adopte la « condition de Lorentz » :

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$$

alors , simultanément apparaissent deux équations différentielles , découplées , pour les potentiels **A** et V , :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}(\mathbf{M}) = -\frac{\mathbf{j}(\mathbf{M})}{\varepsilon_0}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V(\mathbf{M}) = -\frac{\rho(\mathbf{M})}{\varepsilon_0}$$

- la valeur particulière que l'on a imposée à div (**A**) est un « choix de jauge » ; c'est la jauge de Lorentz , qui diffère de celle de Coulomb (div (**A**) =0) cette dernière convenant mieux aux problèmes de magnétostatique ou à ceux qui n'impliquent pas de charges libres . Quelle que soit la « transformation de jauge » (**A->A'** ; V-> V') elle est conçue pour assurer « l'invariance des champs »

= commentaires sur ces équations

- il y a donc quatre équations différentielles du second ordre , inhomogènes , à résoudre dans un problème d'électromagnétisme ; pour aboutir à une solution physique , il faut leur ajouter les conditions aux limites auxquelles doivent satisfaire les champs **E** et **B** ou les potentiels **A** et V ;

- dans le vide , le deuxième membre de ces équations est nul ; on dit que l'on a un système d'équations différentielles homogènes ; leur solution en est évidemment simplifiée ; on en trouvera un exemple plus loin ;

- une fois déterminées les expressions pour **A** (**r** , t) et V(**r** ,t,) les champs s'en déduisent par les relations :

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{rot}\,(\mathbf{A})$$

- l'opérateur différentiel □

l'opérateur $\square = (\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})$

est bien connu ; on connait des solutions générales des équations homogènes du type :

$$\square\, g(\mathbf{r}, t) = 0$$

: solution sphérique ; l'expression en coordonnées sphériques du Laplacien permet de voir que l'équation différentielle se transforme en une équation de propagation à une dimension pour la quantité [r g (r, t)] d'où:

$g(\mathbf{r}, t) = 1/r\ [\,h(t - r/c) + k(t + r/c)\,]$

h et k sont des fonctions quelconques ; « c » est la vitesse de propagation de la perturbation dans le vide ;

: solution en ondes planes ; la symétrie des équations différentielles permet aussi de chercher des solutions du type :

$g'(\mathbf{r}, t) = h'(\mathbf{r} - \mathbf{c}t) + k'(\mathbf{r} - \mathbf{c}t)$

« c » est ici un vecteur de longueur « c » orienté dans l'espace ; la solution h' (**r** - **c**t) se propage dans une direction parallèle à **c** de sorte que , à t fixé , tous les points du plan (**r** - **c**t)= contante correspondent à la même valeur de la perturbation h' (**r** - **c**t) ;

- une perturbation électromagnétique se propage dans le vide avec la vitesse c ; l'isotropie de l'espace montre que cette propagation est identique dans toutes les directions ;

- il est aisé de montrer que **E** et **B** satisfont eux aussi à la même équation d'onde ; comme les dérivées partielles temporelles et spatiales permutent , il suffit par exemple d'appliquer l'opérateur **rot** à l'équation qui donne **A** pour avoir l'équation d'onde relative à **B** .

☐ $\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(-\nabla\rho - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}\right)$

☐ $\mathbf{B} = -\mu_0\ \mathbf{rot}\,(\mathbf{j})$

- cela étant il reste à répondre à une dernière question : qu'en est-il de la fonction f qui intervient dans l'équation de jauge ; autrement dit , si l'on fixe une valeur de la divergence de **A** qu'elle incidence cela a-t-il pour f ? Il suffit pour cela d'écrire que si

$\mathrm{div}\,(\mathbf{A}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$ il doit en être de même pour le couple **A'** , V' : c'est toujours le principe d'invariance ; en les substituant dans cette équation on obtient :

☐ f(**r**,t) = 0

ainsi f n'est pas tout à fait quelconque ; c'est le prix à payer pour conserver l' invariance de Jauge et conserver la condition de Lorentz . Toutes les transformations de jauge qui préservent cette condition s'appelent des « jauges de Lorentz »

= retour sur la jauge de Coulomb

On l'a vu , la jauge de Coulomb , déjà préférable dans le cas statique , a ici aussi des avantages . Supposons que l'on choisisse div (**A**) =0 ; on reste avec l'équation :

$$\Delta V = -\frac{\rho(\mathbf{M})}{\varepsilon_0}$$

dont la solution est , comme en statique :

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,dv(\mathbf{r})$$

Ainsi le potentiel scalaire est juste le potentiel « instantanné » de Coulomb . Mais dans ces conditions l'équation à laquelle doit obéir le potentiel vecteur est :

☐ $\mathbf{A}\,(x, t) = -\mu_0\mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial V}{\partial t}$

en principe , puisque V est connu par l'équation de Coulomb , que **J** est donné , on saurait tout calculer : on a une équation différentielle avec second membre . Mais il est interessant de faire la remarque suivante . Puisque ce dernier terme s'exprime comme un gradient , il est donc irrotationnel ; par ailleurs le champ de vecteur **J** peut toujours être décomposé de manière unique en $\mathbf{J_L} + \mathbf{J_T}$, c'est à dire en un champ longitudinal ou irrotationnel et un champ transverse ou sans divergence .

Et donc , l'équation qui donne **A** se réduit à :

$$\Box\ \mathbf{A}(x,t) = -\mu_0 \mathbf{J_T}$$

en même temps :

$$\mu_0 \mathbf{J_L} = \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial V}{\partial t}$$

Ce choix de jauge est intéressant quand il n'y a pas de termes de sources dans les équations de Maxwell car V=0 ; du coup le courant longitudinal est nul et les champs sont simplement donnés par :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{rot}\,(\mathbf{A})$$