Potentiels retardés

Comment exprimer les solutions des équations de maxwell en présence des termes de « sources » (équations inhomogènes). C'est l'objet de ce paragraphe essentiel pour la physique .

= solution générale

- considérons d'abord le cas d'une source ponctuelle $q(t)$ placée à l'origine des coordonnées ; pour tous les points , hormi l'origine , et pour respecter la symétrie sphérique , $V(\mathbf{r}, t)$ a pour solution :

$$V(\mathbf{r}, t) = 1/r \ [h(t - r/c) + k(t + r/c)]$$

mais pour des raisons physiques , à un instant t donné , le potentiel ne peut dépendre que des états de la source à des temps antérieurs (postulat de « causalite ») ; on ne garde donc , au contraire des solutions mathématiques , que :

$$V(\mathbf{r}, t) = 1/r \quad h(t - r/c)$$

Pour déterminer la fonction h (t - r/c) il suffit de remarquer que l'équation relative à $V(\mathbf{r}, t)$ tend vers l'équation de Poisson si r tend vers 0 ; on doit donc identifier :

$$V(\mathbf{r}, t) = 1/r \quad h(t - r/c) = 1/r \ h(t) = \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

d'où la solution du problème à une source ponctuelle :

$$V(\mathbf{r}, t) == \frac{q(t - r/c)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

Plus généralement pour une densité de charges $\rho(\mathbf{r}, t)$ (et en usant des mêmes arguments pour le potentiel vecteur) :

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r'}, \mathbf{t} - |\mathbf{r} - \mathbf{r'}|/\mathbf{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} dv(\mathbf{r'})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r'}, \mathbf{t} - |\mathbf{r} - \mathbf{r'}|/\mathbf{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} dv(\mathbf{r'})$$

: la quantité $|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|/c$ est le temps nécessaire à la lumière pour aller de **r'** en **r** (propagation de « l'information ») ; c'est pour cette raison que ces solutions s'appelent « potentiels retardés » .

: ce sont les solutions particulières du problème ; il convient de leur ajouter les solutions générales des équations sans second membre .

= application au calcul des champs

Le résultat précédent peut sembler « bricolé » ; il ne l'est pas du tout ! c'est même une manière élégante de cherher la solution dans le cas des potentiels retardés . Cette manière de faire mérite même d'être regardée d'une autre manière .

L'équation différentielle à laquelle obéit le potentiel V (**r**,t) est :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V(\mathbf{r},t) = -\frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\varepsilon_\mathbf{0}}$$

pour simplifier les écritures on écrira sa solution sous la forme :

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{[\rho(\mathbf{r}',t')]_{ret}}{|\ \mathbf{r}-\mathbf{r}'\ |}\ dv\ (\mathbf{r}')$$

définissant ainsi par comparaison ce que l'on appelle la densité de charges « retardée » :

$$[\rho(\mathbf{r}',t')]_{ret} = \rho(r',\ t-\frac{1}{c}|\ \mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$$

et le temps t'= $t_{ret} = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$

Par ailleurs , les équations complètes de Maxwell donnent l'équation à laquelle obéit le champ électrique :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(-\nabla\rho - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}\ \right)$$

Comme dans l'équation du potentiel , le second membre est une fonction de r,r' t (t' =t_{ret} est exprimé en fonction de ces trois grandeurs) . Il apparaît donc licite d'écrire que , par analogie , la solution retardée pour le champ électrique est :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{|\ \mathbf{r}-\mathbf{r}'\ |}\ \left[-\nabla'\rho - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t'}\ \right]_{ret}\ dv(\mathbf{r}')$$

Il est alors instructif de transformer ce résultat pour bien montrer comment on extrait la solution statique et et la composante qui dépend du mouvement des particules chargées .
Il y a une petite subtilité de calcul cependant car $\nabla'[\ f(r',t')]_{ret} \neq [\nabla' f(r',t')]_{ret}$
Le sens de ∇' dans le crochet est : gradient pour r' et t' fixés ; le sens de ∇' hors du crochet c'est le même gradient mais pour r et t fixés . Autrement dit :

$$\nabla'[\rho(\mathbf{r}',t')]_{ret} = [\nabla'\rho(\mathbf{r}',t')]_{ret} + [\frac{\partial\rho}{\partial t'}]_{ret}\ \nabla'\ (t - \frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$$

$$= [\nabla'\rho(\mathbf{r}',t')]_{ret} + [\frac{\partial\rho}{\partial t'}]_{ret}\ \frac{1}{c}\ \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

On peut reporter ce résultat dans la solution pour le champ électrique : en supposant que seule une charge q est en mouvement avec la vitesse $\mathbf{v}$ une situation que l'on commentera ensuite on obtient après des calculs fastidieux et sans grand intérêt ici :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right]_{ret} + \frac{\partial}{c\partial t}\left[\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\right]_{ret} - \frac{\partial}{c^2\partial t}\left[\frac{\mathbf{v}}{\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]_{ret}\right\}$$

Dans cette expression on a fait apparaître le coefficient $\kappa = 1 - \frac{\mathbf{v}}{c}.\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$

Le premier terme de l'équation en $\mathbf{E}$ est tout simplement le terme statique (lorsque $\mathbf{v}$ est nulle) ; les deux derniers qui contiennent une dérivée en temps , montrent que la vitesse et l'accélération de la particule joueront un rôle pour engendrer une onde élecromagnétique lorsque les particules sont en mouvement par rapport à un référentiel fixe . Des formules plus compliquées existent pour le cas où la vitesse de la particule serait voisine de celle de la lumière (cas du synchrotron)

L'équation pour $\mathbf{E}$ est en somme une généralisation de l'équation de Coulomb pour une seule charge statique .

On sait écrire le champ magnétique $\mathbf{B}$ produit par cette charge en mouvement , généralisant ainsi la loi de Biot-Savart .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\left\{\left[\frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right]_{ret} + \frac{\partial}{c\partial t}\left[\frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\right]_{ret}\right\}$$

Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

Le problème de la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide est certes important pour le physicien ; mais , après tout , la physique ne gouverne pas le monde ! en revanche ce problème a une importance décisive dans la vie pratique . La transmission de l'information , le flux de chaleur qui nous vient du soleil , la cuisson des aliments dans un four micro-ondes , la cohérence de la lumière des lasers et même le chauffage au feu de bois de nos ancètres sont tous des phénomènes qui « profitent » de la nature très universelle d'une onde électromagnétique .

= le contexte général

Comme dans le cas d'un problème de mécanique (vibration du son dans un tuyau sonore , pendule oscillant , ondes à la surface de l'eau , ..) , on se propose de chercher les « modes de vibration » du champ électromagnétique ; mathématiquement , ce sont toutes les solutions indépendantes des équations-potentiel sans second membre ; physiquement , chacun de ces modes peut être excité et se propager indépendamment des autres ; on dit aussi que ce sont des « modes propres » .

Nous restreindrons notre ambition en nous limitant au cas du vide (donc sans second membre dans les équations de **A** et V) , infini (donc sans conditions aux limites) , sans nous interroger dans ce paragraphe sur la nature ou sur les caractéristiques des charges et des courants qui donneront naissance à ces ondes . Comme on l'a souligné on peut trouver des modes de propagation en ondes planes , en ondes sphériques ..... ; toute combinaison de ces solutions est aussi une solution . En raison de leur importance pratique on cherche d'abord ici les solutions de type « ondes planes » ; d'ailleurs , quelle que soit la source qui leur donne naissance , tant qu'elle a des dimensions finies , assez loin de la source , on peut toujours considérer les ondes planes comme des bonnes solutions .

= solution en « ondes planes »

- L'espace étant isotrope , on ne perd pas de généralité en examinant une propagation selon le seul axe x ; bien sûr , **E** et **B** restent des vecteurs dont on devra trouver l'orientation par rapport à cet axe .

On a donc à résoudre le système d'équations suivant :

$$\Box\, \mathbf{A}(x,t) = \mathbf{0}$$

$$\Box\, V(x,t) = O$$

On va pratiquer ce que l'on appelle une analyse de Fourier ; elle consiste à chercher les conditions de propagation d'une onde sinusoïdale plane de pulsation ω ; c'est possible ou ce n'est pas possible , mais si une telle solution satisfait aux équations précédentes cela prouve que c'est possible . Cela étant , nous chercherons à écrire :

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}\ \cos[\, q(\omega)\, x - \omega t\,] \qquad \text{avec} : \ \mathbf{q} = (q, 0, 0)$$

Le problème se ramène donc maintenant à trouver $q(\omega)$ et à préciser l'orientation de **a** ; l'amplitude de **a** restera indéterminée en module puisque l'on résout des équations homogènes ; de même on cherche :

$$V = v\ \cos[\, q(\omega)\, x - \omega t + \varphi\,]$$

Ces expressions font bien apparaître ω comme la pulsation de l'onde ; on désigne par **n** un vecteur unitaire orienté suivant x ; il faut aussi trouver φ et la relation entre v et **a** .

- première remarque

C'est le moment d'appliquer ce que l'on a signalé sur la jauge de « Coulomb » ; en l'absence de sources extérieures on choisit div (**A**) =0 et V=0 ; le vecteur **A** est donc perpendiculaire à **q**

- résolution des équations de Maxwell

on commence par exprimer les potentiels ; en reportant la fonction **A** dans son équation différentielle on a :

$$\square\ \mathbf{A}(x,t) = -\ \mathbf{a}\ \left(q^2(\omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \cos[q(\omega)\,x - \omega t] = \mathbf{0}$$

Puisque l'on ne peut choisir **a = 0** , (sous peine de n'avoir plus d'onde !) , cette équation impose : $q(\omega) = \omega/c$; c'est ce que l'on appelle une « relation de dispersion » ;

: **q** (ω) est le vecteur d'onde correspondant à la fréquence ω ; il est proportionnel à ω c'est-à-dire que les ondes sont « sans dispersion » ; c'est une propriété du vide ;

: le vecteur d'onde étant orienté parallèlement à **n** , les plans d'onde équiphases sont donc perpendiculaires à **n** ; les plans équiphases sont séparés le long de x par une distance égale à $2\pi/q$: c'est la longueur d'onde ;

: la vitesse de ces ondes , quelle que soit la fréquence , est « c » ; elles se propagent donc toutes à la vitesse de la lumière .

- calcul des champs et de leur orientation dans l'espace

B se déduit de **A** par la relation de définition

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}(\mathbf{A}) = -(\mathbf{q} \times \mathbf{a}) \sin(q x - \omega t)$$

B est donc dans le plan perpendiculaire à x

: E provient de **B** par intégration sur le temps de l'équation :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{M})}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{B}(\mathbf{M})) = -(\mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{a})) \cos(q x - \omega t) \quad ; \quad \text{soit :}$$

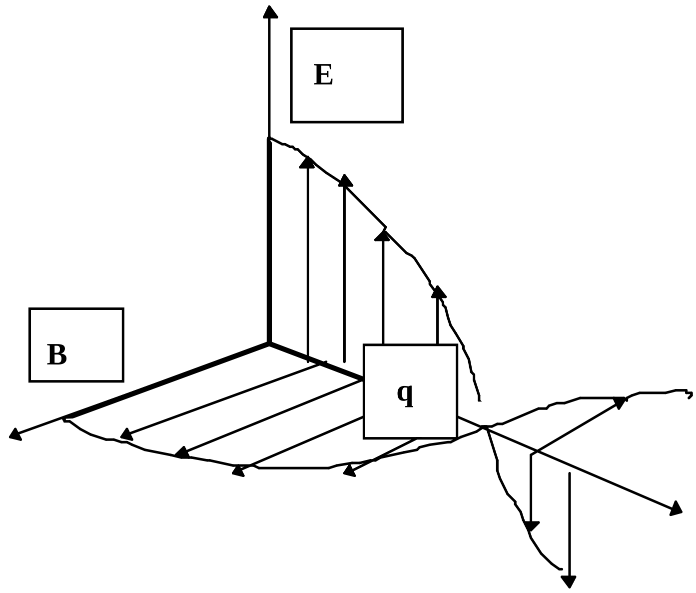
$$\mathbf{E} = (\mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{a})) \frac{c^2}{\omega} \sin(q x - \omega t) = -\frac{c^2}{\omega}\, \mathbf{q} \times \mathbf{B}$$

on en conclut que **E** est perpendiculaire à **q** et à **B** , qu'il est donc lui aussi perpendiculaire à x ;

- caractères de cette onde électromagnétique plane

: il faut retenir que c'est une onde « polarisée linéairement » ; on entend par là que les champs associés ont des orientations fixes , perpendiculaires au vecteur d'onde **q** = q **n** ; cette polarisation ne change pas d'orientation tout au long de la propagation

: les expressions montrent que **E** est parallèle à **a** . On peut donc choisir le couple (**E , B**) orienté comme l'on veut dans le plan perpendiculaire à **x** pourvu que les vecteurs **E , B , q** forment un trièdre direct : on dit qu'il y a dégénérescence des solutions : dans ce plan on peut faire tourner en bloc le couple (**E , B**) ; : on a alors une autre onde , polarisée rectilignement dans une direction différente .



: le fait que les équations de propagation soient linéaires permet d'affirmer qu'une combinaison linéaire de solutions est encore une solution de l'équation d'onde ;
: en additionnant deux ondes polarisées linéairement , on pourrait préparer une onde polarisée « circulairement »

- reflexion d'une plane sur une surface conductrice parfaite

A supposer que l'on place un plan conducteur parfait perpendiculairement à une onde plane incidente , comment se fait la reflexion ? les équations aux limites doivent être satisfaites , c'est à dire que le champ électrique tangent doit être nul . Il est aisé de voir que dans l'onde stationnaire qui se forme , champ électrique et champ magnétique seront en quadrature .

= ondes sphériques

La symétrie des sources ou des conditions aux limites impose parfois de chercher des solutions de symétrie sphérique ; on a fait allusion à ce type de solution quand on a calculé les potentiels retardés ; on reprend ce problème en détail ici . L'équation relative au potentiel scalaire s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r}\ \frac{\partial^2 [\, r\, V(r\,,\ t)]}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 [\ V(r\,,\ t)]}{\partial t^2}$$

c'est une équation de propagation classique dont les solutions en V sont :
$V(r\,,t) = 1/r\ [\,h(t - r/c) + k(t + r/c)\,]$
: la première correspond à une onde s'éloignant du point origine (onde divergente) et la deuxième à une onde convergente vers le point origine ;

: physiquement si une source est placée à l’origine et que l’espace soit sans bords seule la première solution doit être retenue ;
: que l’amplitude varie en 1/r est caractéristique de ces ondes sphériques ; leur intensité varie donc en (1/r)2 ce qui est un gage de conservation de l’énergie ;
: une onde sphérique sinusoïdale est décrite par le potentiel :

$$V(r, t) = \frac{1}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi)$$

ou φ est une phase fixée par les conditions à l’origine ; k est le vecteur d’onde ; les ondes sont sans dispersion , comme les ondes planes .

propagation de l'énergie électromagnétique dans le vide ; vecteur de Poynting

On a noté en électrostatique et en magnétostatique la relation entre densité d'énergie et champ électrique ou champ magnétique ; la question doit être reprise dans le cas d'une onde électromagnétique . On va voir : que de l'énergie se propage , que l'on peut calculer le courant de densité d'énergie et qu'il s'exprime facilement en fonction des champs **E** et **B** .

Pour cela on part des deux équations de Maxwell qui sont valables dans le vide :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

pour faire apparaître un résultat simple , on multiplie la première scalairement par **B** et la deuxième par **E** ; on soustrait membre à membre ces deux équations et on applique l'identité suivante **:**

div (**E** x **B**) **= B.rot (E) - E. rot (B)** ; moyennant quoi **:**

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 c^2\, \mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(\varepsilon_0 c^2 B^2 + \varepsilon_0 E^2)\right] = 0$$

Cette dernière équation est tout à fait remarquable ; le deuxième terme donne l'évolution dans le temps d’une densité d'énergie électromagnétique ; le premier se lit comme la divergence d'un vecteur **R** : il correspond à un courant de densité d'énergie électromagnétique ;
: ce vecteur : $\mathbf{R} = \varepsilon_0 c^2\, \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ = se nomme le vecteur de Poynting ; il est orienté dans le sens du vecteur d'onde pour une onde plane ;
: comme **E** ou **B** il se propage à la vitesse de la lumière et assure le transport de l'énergie ;
: la moyenne dans le temps de **R** est

$$\langle \mathbf{R} \rangle = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) v_\varphi \frac{\mathbf{q}}{q}$$

: la forme de l'équation assure qu'il y a conservation de l'énergie puisqu'il n'y a pas de second membre; c'est une équation de "conservation locale" (valable uniquement dans le vide).

Champs rayonnés par un dipôle électrique oscillant

Problème pratique important , s'il en est , et en tout cas modèle de ce que peut être une antenne filiforme rayonnant un champ électromagnétique dans le domaine des fréquences radio , le problème du dipôle oscillant mérite un traitement détaillé .

= dipôles rayonnants

On va simuler le problème en considérant un dipôle électrique placé à l'origine des coordonnées dont l'orientation sera fixe , alignée suivant le vecteur unitaire **n** , mais ayant un moment p (t) qu'en fin de calcul on prendra sinusoïdal ; le milieu que l'on considère est le vide : pas de charges libres , pas de courants ; pour autant les équations de Maxwell ne sont pas homogènes : il y a un dipôle qui joue le rôle de source ; on ne peut donc employer la jauge de Coulomb ; on est donc contraint à suivre la route générale : écrire les équations pour le potentiel retardé A , en déduire V par l'équation de jauge , et calculer ensuite les champs en tout point de l'espace .

- retour sur l'électrostatique

en placant un dipôle $\mathbf{p}_0$ fixe en $\mathbf{r} = 0$ on sait que le potentiel créé en $\mathbf{r}$ est

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{r}^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{p}_0 \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

soit , en utilisant une « distribution » déjà vue et en inversant les dérivées :

$$\Delta\ V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{p}_0 \cdot \nabla\left[\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{p}_0 \cdot \nabla[\delta(\mathbf{r})] = -\left\{-\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla[\mathbf{p}_0\ \delta(\mathbf{r})]\right\}$$

Cette dernière expression , encore qu'elle soit « scabreuse » mathématiquement , montre que l'on peut assimiler la quantité $\{-\nabla[\mathbf{p}_0\ \delta(\mathbf{r})]\}$ à une densité de charges $\tilde{\rho}$, fictive , dans une équation de Poisson que l'on devrait résoudre mais dont on en connait la solution formelle :

$$\Delta\ V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\tilde{\rho}(\mathbf{r})$$

- supposons maintenant que le dipôle soit oscillant : son module dépend du temps -> $\mathbf{p}_0(t)$ -> $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$; à quelle équation obéit le potentiel électrique ? en fait on se retrouve en paysage connu : $V(\mathbf{r}, t)$ est régi par une des équations de l'électromagnétisme :

$$\Box \, V(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$$

L'équation relative au potentiel vecteur implique la définition des courants fictifs $\tilde{j}(\mathbf{r}, t)$ qui sont calculés à partir de l' équation de conservation des charges fictives ; on s'assure ainsi de la consistence des équations de Maxwell :

$\nabla \tilde{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = 0$ dont on déduit , après substitution de $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$:

$$\tilde{j}(\mathbf{r}, t) = d/dt\,[\mathbf{p}_0(t)]\,\delta(\mathbf{r})$$

La solution du problème est donc toute contenue dans les expressions des potentiels retardés :

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{r'}, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r'}|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} \, dv(\mathbf{r'})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r'}, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r'}|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} \, dv(\mathbf{r'})$$

En appliquant ces formules au modèle de dipôle on calcule immédiatement le potentiel vecteur :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\{ d/dt\,[\mathbf{p}_0(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r'}|/c)\} \; \delta(\mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} \, dv(\mathbf{r'})$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \, d/dt\,[\mathbf{p}_0(t - r/c)]$$

c'est un résultat très simple dès que la dépendance temporelle du dipôle est :

$\mathbf{p}_0(t) = \mathbf{p}_0 \cos(\omega t)$ --->

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,\omega\,\mathbf{p}_0\,\sin[\omega(t - r/c)]$$

$$V(\mathbf{r},t) = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathbf{p}_0 .\mathbf{r}\left\{\frac{1}{r^3}\cos[\omega(t - r/c)] - \frac{\omega}{c\,r^2}\sin[\omega(t - r/c)]\right\}$$

Comme toujours , le potentiel vecteur est orienté parallèlement à $\mathbf{p_0}$ qui a une direction fixe dans l'espace . La solution pour V a été obtenue en écrivant que :

$$\mathrm{div}(A) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$$

= discussion physique

- hypothèse basse fréquence : $\omega r/c \ll 1$

seul le premier terme dans le potentiel $V(\mathbf{r},t)$ est significatif ; **A** et V sont donc en quadrature .Dans cette approximation le résultat est simplement celui calculé en électrostatique où l'on a introduit une dépendance temporelle de $\mathbf{p}_0$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}_0(t)$$

la polarisation de **E** s'en déduit , comme en électrostatique . On est dans ce que l'on peut appeler une situation « quasi statique » : l'onde s'est très peu propagé et n'a pas introduit de déphasage entre le point d'origine et le point d'observation .

- hypothèse grande distance / fréquence élevée du dipôle : $\omega r/c \gg 1$

dans l'expression du potentiel il convient de prendre l'autre terme :

$$V(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,[\,p_0\;r\;\cos(\theta)]\,\frac{\omega}{c\,r^2}\,\sin[\omega(t - r/c)]$$

Les champs électriques et magnétiques **,** en coordonnées sphériques , ont plusieurs composantes mais on ne gardera que celles qui donnent un vecteur de Poynting qui sort d'une sphère de grand rayon placée loin du dipôle

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, p_0\, \frac{\sin(\theta)}{r} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cos[\omega(t - r/c)]\ \mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, p_0\, \frac{\sin(\theta)}{cr} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cos[\omega(t - r/c)]\ \mathbf{u}_\varphi$$

Dans cette approximation on doit faire les commentaires suivants

: la solution est à symétrie cylindrique autour de $\mathbf{z} // \mathbf{p}_0(t)$

: on a bien une onde sphérique : on est loin de la source ; la phase de **E** et de **B** ne dépend que de r et l'amplitude varie en 1 / r

: l' onde est polarisée dans le plan **z , r**

: on sait calculer le diagramme de rayonnement ; il est anisotrope dans l'espace ; on exprime cette propriété par un flux d'énergie moyen dans le temps par unité d'angle solide

$$\frac{d\Phi}{d\Omega} = \frac{c\, p_O^2 \sin^2(\theta)}{32\ \pi^2\ \varepsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4$$

: la puissance rayonnée dans tout l'espace est donc , après intégration dans toutes les directions :

$$\boxed{\Phi = \frac{c\, p_O^2}{12\ \pi\ \varepsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4}$$

On retiendra essentiellement que cette puissance est proportionnelle à la puissance quatre de la fréquence ; ce modèle est valable pour les émissions optiques des atomes excités (voir Cours de mécanique quantique Licence et Maîtrise PF) ; il explique le caractère bleu du ciel : les atomes de l'atmosphère excités par la lumière du soleil sont assimilés à des dipôles rayonnants et sont plus émissifs dans les fréquences élevées que dans les fréquences basses (le rouge) .

- dernière remarque

Dans les formules précédentes il apparaît souvent le rapport :

$$\frac{c}{\varepsilon_0} = c^2\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} = c^2 Z_0$$

Z_0 est « l'impédance du vide » dans le système MKS cette grandeur est homogène à une résistance et elle vaut 376 ohms