Emission électromagnétique d'une particule chargée en mouvement accéléré

La controverse a été assez grande dans le milieu scientifique français en 1999 et 2000 à propos de la construction d'une nouvelle grande machine de rayonnement synchrotron , machine baptisée « Soleil » , pour qu'à l'occasion de ce cours on ne prenne pas quelque temps pour expliquer comment un électron en mouvement non uniforme [$\dot{\mathbf{v}}(t) \neq 0$] émet une onde électromagnétique . Le phénomène est d'ailleurs plus général et c'est pourquoi il est bon de s'y attarder et de donner quelques exemples différents où les mêmes résultats sont valides

= la formule de Larmor

Le calcul de l'émission lumineuse par une charge accélérée est très compliqué parce qu'il implique l'utilisation de la relativité ; les formules du paragraphe précédent n'en sont qu'un avant-goût . Ce calcul est du domaine de l'option « relativité » associée au programme de licence . Mais revenons au cas plus simple d'un électron non relativiste [$\mathbf{v}(t) \ll c$] en donnant une autre forme aux formules vues plus haut .

Les potentiels scalaire et vectoriel d'une charge en mouvement sont donc :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad \text{et} \qquad V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Dans ces deux expressions non relativistes on doit comprendre que la position **r'** de la particule est à celle occupée au « temps retardé » :

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$$

En écrivant que **B**(**r**,t) =**rot**[**A**(**r**,t)] et en exprimant **E** par les formules standard on obtient « aisément » :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \ \{\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}[\frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}',t') x (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{r}',t') x (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{c}]\}_{ret}$$

Le premier terme est celui qui donne la loi de Laplace ; c'est le seul qui existe si la charge a un mouvement uniforme . Le deuxième n'existe que si le vecteur vitesse dépend du temps . Comme le point d'observation **r** est dans loin de la charge (**r'**) , **B** est perpendiculaire à (**r-r'**) . Quant au champ électrique , on l'obtient à la suite sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{c^2} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \right\}_{ret}$$

Le premier terme est celui , classique , de Coulomb ; le deuxième est celui qui est nouveau et on vérifie qu'il donne un champ qui est perpendiculaire à **B** et à (**r-r'**) .

Le vecteur de Poynting associé à ces champs est donc dirigé dans la direction de $\mathbf{r} = r\,\mathbf{n}$. Si θ est l'angle entre $\mathbf{n}$ et $\dot{v}$ on obtient :

$$\mathbf{R} = \mathbf{n} \frac{1}{36\pi^2} \frac{q^2}{\varepsilon_0 r^2} \sin^2\theta \, \dot{v}^2$$

En intégrant ce résultat pour toutes les directions on obtient l'énergie ϕ émise par unité de temps par la charge q , animée d'une accélération $\dot{v}$; c'est la formule non relativiste de Larmor

$$\boxed{\phi = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\dot{v}^2}{c^3}}$$

Ce résultat étant établi , on peut se poser les questions suivantes : si une particules chargée a une énergie cinétique U et qu'elle a un mouvement non uniforme ($\dot{v} \neq 0$), quelle énergie perd elle par rayonnement ?

- mouvement uniformément accéléré .

c'est le cas le plus simple : un champ électrique extérieur constant accélère la particule , comme on le fait dans un accélérateur linéaire de particules . Soit E ce champ .

$$\frac{qE}{m} = \dot{v}$$

le gain d'énergie par unité de temps sous l'influence du champ est : $\frac{dU}{dt} = qEv$; c'est cette quantité qu'il est significatif de comparer avec ϕ :

$$\phi \Big/ \frac{dU}{dt} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{3} \frac{1}{c^3} \left(\frac{qE}{m}\right)^2 \frac{1}{qEv} = \frac{2}{3} \left[\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{mc^2} \right] \frac{qE}{mcv}$$

Le terme entre crochets est homogène à une longueur ; c'est le « rayon R_0 de l'électron » ; $R_0 = 2.8\ 10^{-15}$m . Supposons pour faire simple que v=c (dans un accélérateur on réalise cela aisément) ; $mc^2 = 0.5$ MeV . Pour avoir un rappor de 1 il faudrait donc appliquer un champ de :

$$E = \frac{3}{2}\frac{1}{2.8\ 10^{-15}}10^6 \ \ V/m \cong 5\ 10^{20} V/m$$

C'est impensable pour bien des raisons . Sauf , sauf que avec des lasers très intenses on n'est pas si loin du compte aujourd'hui ! d'où les projets qui existent dans le but d'engendrer des rayonnements par cette « technique » .

- mouvement circulaire uniforme à la vitesse v

On observe la particule qui tourne à une vitesse uniforme sur un cercle de rayon R ; l'accélération transverse est : $\omega^2 R$; on va examiner deux cas : le rayonnement synchrotron lorsqu'un électron tourne à une vitesse voisine de c sur un cercle de rayon de 100 m ; puis l'électron sur une orbite atomique avec un rayon de un angström .

: cas synchrotron ; on cherche à savoir combien un électron de vitesse c , d'énergie cinétique classique $U \cong mc^2$ perd d'énergie par rayonnement pendant un tour de durée T ; soit

$$\phi T / U = \frac{2}{3}\ r_0\ \frac{1}{c^3}(\omega^2 R)^2 T = \frac{2}{3}\ r_0\ /R$$

Si l'on croit ce résultat classique , cette valeur est absolument négligeable ; en fait , la particule ayant une vitesse voisine de celle de la lumière , il faut développer un calcul « relativiste » ; il change tout ! on trouve alors un résultat théorique qui est :

$$\phi T / U = \frac{2}{3}\ (r_0\ /R)\gamma^4$$

où $\gamma = [\ 1 - (\frac{v}{c})^2\ ]^{-\frac{1}{2}}$

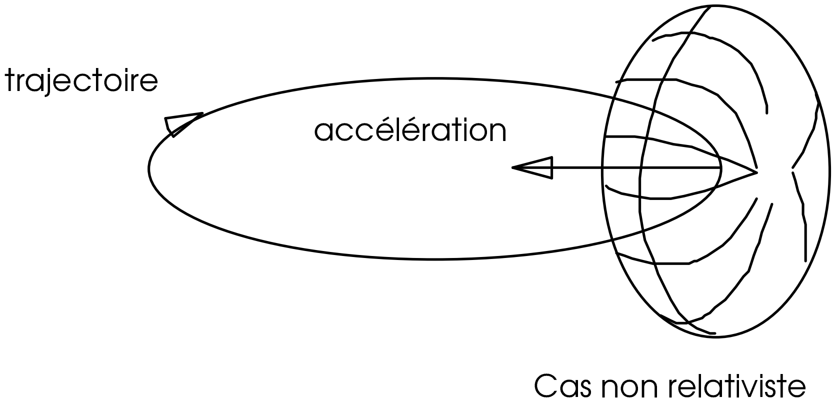
Tout est dans ce facteur qui peut être très grand , voisin de 10^4 dans les synchrotrons modernes qui confèrent aux électrons des énergies de l'ordre de quelques GeV . Dans ces conditions on comprend que la perte d'énergie par tour peut n'être plus négligeable et bien sûr mesurable . On cherche d'ailleurs à maximiser cette perte , car c'est elle qui se traduit par une énergie dsous forme de RX intenses .

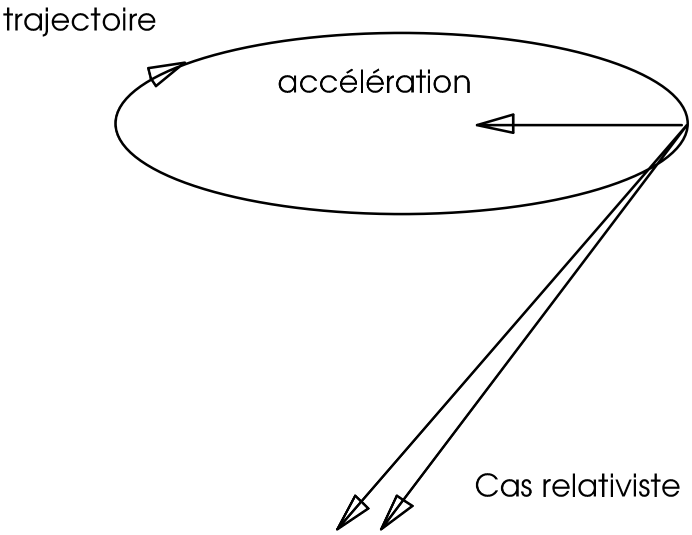
: cas de l'atome d'hydrogène ; un électron sur une orbite de Bohr . L'étudiant pourra faire un calcul classique , « pour voir » . remarque à relier au cours de mécanique quantique .

= Cas du mouvement circulaire : les synchrotrons .

Dans la pratique , les synchrotrons sont des machines qui accélèrent des électrons ou des positons jusqu'à leur donner des vitesses voisines de celle de la lumière ; ces particules tournent sur un cercle de quelques dizaines de mètres à 100 mètres de rayon ; elles sont accélérées par des klystrons puissants et leur trajectoire est courbée par des aimants permanents (application de Biot et Savart , tout simplement) . Avec de telles caractéristiques géométriques , l'émission se fait dans le domaine des RX mous ou durs ; c'est en ce sens que ces sources sont précieuses pour les études structurales des matériaux cristallisés , en particulier dans le domaine de la biologie .

Ainsi le rayonnement issu d'un synchrotron est polarisé dans le plan de la machine . Le petit dessin ci dessous donne une idée de l'intensité rayonnée dans les cas relativiste et non relativiste .





En réalité , ce n'est pas tout à fait la fin de l'histoire ! dans les installations modernes on introduit des « dispositifs d'insertion » sur la trajectoire circulaire ; ils sont composés d'une longue succession d'aimants créant un champ magnétique vertical ; leurs pôles alternent rapidement le long de la trajectoire : + ,- ,+ ,- ,+ ; leur effet est de donner une petite composante sinusoïdale au mouvement des particules , augmentant beaucoup la brillance du faisceau de RX .

Guides d'ondes

On appelle guide d'onde un « tuyau » métallique vide , de section identique le long de l'axe générateur z , dont les parois sont faites d'un conducteur parfait . La question physique est : dans quelles conditions peut-on propager une onde électromagnétique dans la direction z .

On divise ces ondes en deux familles : dans la première $B_z = 0$; ce sont des modes transverses magnétiques (TM) ; dans la deuxième $E_z = 0$: ce sont des modes transverses électriques (TE) ; à titre d'exemple on traitera les modes TM à l'aide des équations de Maxwell agrémentées de leurs conditions aux limites .

= équation générale .

Dans le guide , on doit satisfaire aux équations homogènes ; si on cherche des ondes progressives le long de z , soit k leur vecteur d'onde parallèle à z et ω leur pulsation ; toutes les grandeurs fluctuantes ont même pulsation ; partons avec l'idée que :
$E_z = e(x,y)\cos(\omega t - kz)$ et $B_z = 0$
dans le vide les composantes de **E** , donc E_z , doivent satisfaire à l'équation de propagation :

$$\Delta E_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

si elles existent les solutions doivent être telles que :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E_z + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)E_z = 0$$

on posera : $\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) = \kappa^2$

la dernière équation différentielle est singulière ; c'est une équation de dite de Kirshhoff à deux dimensions ; (voir chapitre suivant) .
Mais E_z doit aussi obéir aux conditions aux limites , c'est à dire être nul sur la surface latérale du guide ; pour aller plus loin on lui donnera une section rectangulaire : côté « a » parallèle à x et côté « b » parallèle à y . Devant une telle équation le premier reflexe est de chercher une solution factorisée : e(x,y) = g(x) h(y) :

$$\frac{1}{g(x)}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{h(y)}\frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} + \kappa^2 = 0$$

cela impose séparément :

$$\frac{1}{g(x)}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} + \kappa_1^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g(x) = g\cos(\kappa_1 x)$$

$$\frac{1}{h(y)}\frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} + \kappa_2^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad h(y) = h\cos(\kappa_2 y)$$

$\kappa^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2$

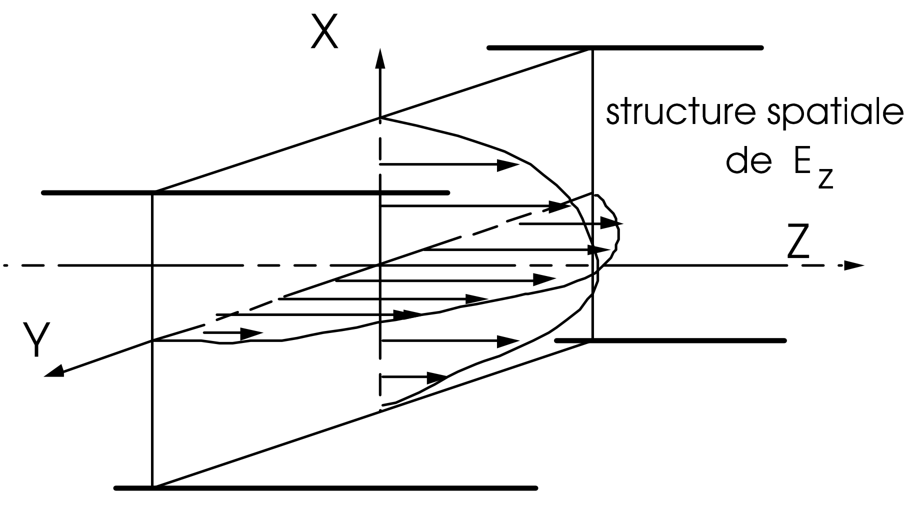
cela étant cette composante doit s'annuler pour x=(+/-)a/2 et y=(+/-) b/2 ; κ_1 et κ_2 ne peuvent donc être quelconques mais :

$\kappa_1 = \frac{1}{a}(\pi + m\pi)$ $\kappa_2 = \frac{1}{b}(\pi + n\pi)$

les indices n et m caractérisent un mode possible ; le premier est n=0 et m=0 ;
les équations de maxwell étant linéaires en champs , chaque composante aura des variations spatiales et temporelles analogues à E_z , à une phase près ; on vérifie qu'elles sont compatibles entre elles pour s'assurer que la solution « bricolée » est une bonne solution . La

conclusion est que la géométrie du guide d'onde induit la loi de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$



section droite d'un guide d'ondes