Chapitre 3

Optique géométrique

Définition

Une onde optique se caractérise par sa fréquence et sa longueur d'onde ; si la fréquence s'étend dans une gamme de 10^12 c/s à 10^15 c/s, dans le vide les longueurs d'onde s'étageront de 300 à 0,3 microns . On définit l'optique géométrique par le fait que ces longueurs d'onde sont petites devant toutes les autres dimensions d'un appareil d'optique (diamètre des lentilles , dimensions des objets et des images , rayon de courbure des miroirs ou des dioptres homogénéité des lentilles ...) ; le caractère fini des longueurs d'onde ne jouera donc aucun rôle à la différence de ce que l'on verra dans les chapitres suivants : « diffraction » et « interférence » . Dans cette approximation les lois de l'optique , c'est à dire la propagation des faisceaux lumineux , seront exprimées en terme de lois géométriques (déplacements de faisceaux , changements d'orientation , surfaces d'onde ..) .

Faire de l'optique suppose que la lumière puisse se propager dans des milieux différents du vide , problème que le chapitre précédent n'a pas traité . On demandera donc simplement à l'étudiant d'accepter , sous réserve d'examen approfondi dans le chapitre VI , que dans un milieu quelconque la constante diélectrique n'est pas ε_0 mais $\varepsilon > \varepsilon_0$; chaque milieu matériel (air , verre , eau ...) est caractérisé par une valeur de ε ; sauf quelques cas particuliers que l'on discutera ultérieurement , ε est une quantité réelle , qui vaut quelques unités de ε_0 ; la propagation des ondes électromagnétiques dans un tel milieu , dit « diélectrique » , est absolument identique à celle des ondes dans le vide , sinon que partout où intervient ε_0 on remplace cette constante par ε . De ce fait , la vitesse des ondes optiques sera non plus v_0 = 300000 km/s mais $\dfrac{v_0}{\sqrt{\varepsilon / \varepsilon_0}}$; les longueurs d'onde seront réduites d'autant .

Dans ce chapitre on commencera par donner quelques théorèmes généraux relatifs à la propagation d'un faisceau optique dans un milieu où l'indice varie lentement d'un point à un autre ; puis le milieu où se propage l'onde sera considéré dans un deuxième temps comme homogène c'est à dire qu'en chaque « point », l'indice optique $n = \sqrt{\varepsilon / \varepsilon_0}$, sera le même . C'est une prétention qui , en pratique , est grossièrement fausse ; il suffit d'observer le paysage à travers un vieux morceau de verre pour remarquer qu'il a une allure « tourmentée » qui se traduit par une déformation des images ou par la perception de zones « liquides » . Mais l'homogénéité est une condition requise pour avoir de bons instruments d'optique ; pour les besoins de l'astronomie on prépare avec un soin infini des lentilles de cinq mètres de diamètre sans défaut d'homogénéité ! Les industriels savent aujourd'hui préparer des verres (verre à vitre) très homogènes , même s'ils doivent produire des centaines de tonnes de ce matériau .

Les fondations de l'optique géométrique

On appelle « optique géométrique » cette branche de l'optique qui considère la longueur d'onde comme très petite devant toutes les autres dimensions qui entrent dans le problème (dimensions du milieu , interfaces , échelle des inhomogénéités ...) ; par référence anticipée aux chapitres suivants c'est donc une approche qui néglige tous les phénomènes de diffraction . Les lois de l'optique vont alors pouvoir être formulées en termes de géométrie ou de mécanique (principe de Fermat) . Les mêmes principes s'appliqueront à la propagation de toutes les ondes dans un milieu inhomogène : ondes acoustiques dans le milieu marin , acoustique médicale , ondes radio dans le milieu circum terrestre .

Nous traiterons d'abord de ces problèmes pour un milieu inhomogène tel que $\mathbf{j}=0$ et $\rho = 0$; quant à l'approximation de longueur d'onde très petite elle est équivalente à dire que le milieu est « homogène localement » : il n'a pas de propriétés qui varie notablement à l'échelle de la longueur d'onde ; quantitativement on écrit cette condition sous la forme :

$$|\nabla n(\omega, \mathbf{r})| \ll \frac{n(\omega, \mathbf{r})}{\lambda} \qquad \text{(hypothèse pour établir l' « eikonale »)}$$

On appelle parfois cette approximation celle des « ondes longues » ; elle s'apparente à ce qu'en thermodynamique des phénomènes de transport on est conduit à faire : définir des grandeurs « locales » (température , pression , ..) ; en optique gémétrique la grandeur « locale » est l'indice .

A partir des équations de Maxwell et sous réserve que l'on puisse définir un indice optique « local » , ou une constante diélectrique locale , on montre aisément que l'onde devrait obéir à l'équation de propagation :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \mu_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -\nabla [\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r},t).\nabla \varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})}]$$

Que faire avec une équation si compliquée sinon trouver des approximations ?

= l'équation « eikonale » (nom d'origine grecque qui signifie « image »)

- soit f($\mathbf{r}$,t) une grandeur propagative dans un milieu homogène infini ; elle obéit à l'équation différentielle :

$$\Delta f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

une solution en forme d'onde plane , avec v= constante , est de la forme :

f($\mathbf{r}$,t) = Re{ a exp[i ($\mathbf{q}$.$\mathbf{r}$ - ωt)]}= Re{ a exp[i φ($\mathbf{r}$,t)]}

- Dans un milieu inhomogène on écrira que l'amplitude a de l'onde varie avec ($\mathbf{r}$,t) et que la phase φ($\mathbf{r}$,t) n'a pas la forme simple qu'elle a dans un milieu homogène . Certes , on peut toujours écrire :

f($\mathbf{r}$,t)= Re{ a($\mathbf{r}$,t) exp[i φ($\mathbf{r}$,t)]}

la question est plutôt de savoir si cela a un intérêt ; c'est tout le but de ce paragraphe que de montrer que cette écriture a un avantage , justement dans le cas des milieux à propriétés lentement variables dans l'espace .

Pourquoi cette forme spéciale ? parce que si l'on revient à l'équation de propagation donnée au début du paragraphe notre hypothèse simplificatrice sur le milieu « lentement inhomogène » est identique à chercher des solutions de :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \mu_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

ce qui après analyse de Fourier conduit à

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) + q^2(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = 0 \qquad q^2(\mathbf{r}) = \mu_0 \varepsilon(\mathbf{r})\omega^2$$

En introduisant dans cette équation la forme voulue :

$$E(\mathbf{r},\omega) = e(\mathbf{r},\omega)\exp[i\varphi(\mathbf{r},\omega)]$$

on doit résoudre par approximations l'équation différentielle :

$$\Delta e + i\ e\ \Delta\varphi + 2i\ \nabla\varphi.\nabla e - e(\nabla\varphi)^2 + q^2 e = 0$$

Pourquoi procéder à une analyse de Fourier et fixer la fréquance de l'onde ? C'est parce qu'en général les expériences se font avec des sources relativement monochromatiques , et surtout , avec des sources continues en temps par opposition avec des sources pulsées qui obligeraient à tenir compte d'une distribution en fréquence .

La première approximation consiste à négliger les variations spatiales de $e(\mathbf{r},\omega)$ -->

$$i\ \Delta\varphi - (\nabla\varphi)^2 + q^2 = 0$$

; dans la littérature on écrit souvent : $\varphi(\mathbf{r},\omega) = \frac{\omega}{c} S(\mathbf{r},\omega) = q_0 S(\mathbf{r},\omega)$

$\nabla\varphi(\mathbf{r},\omega)$ joue le rôle de vecteur d'onde local ; de sorte que :

$$(\nabla S)^2 - \frac{i}{q_0}\Delta S = \frac{q^2}{q_0^2} = n^2(\mathbf{r},\omega) \qquad ;$$

On simplifie encore cette équation en négligeant le terme en laplacien , ce qui est très licite dans le domaine de l'optique ; soit la forme finale de l'équation eïkonale :

$$(\nabla S)^2 = \frac{q^2}{q_0^2} = n^2(\mathbf{r}\ ,\omega)$$

= Conséquences tirées de cette équation

- On appelera « front d'onde » une surface telle que :
$S(\mathbf{r},\omega) =$ constante
- cela étant , quelle est la structure locale de l'onde ? ou , comment relier les orientations des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ au gradiant de $n(\mathbf{r},\omega)$? $\left(n^2(\mathbf{r},\omega) = \frac{q^2}{q_0^2}\right)$

Si l'on écrit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\ \exp\{i[-\omega t + \varphi(\mathbf{r})]\}$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})\ \exp\{i[-\omega t + \phi(\mathbf{r})]\}$$

on doit toujours satisfaire $\operatorname{div}[\mathbf{B(r)}] = 0 = \operatorname{div}[\mathbf{B}_0(\mathbf{r})] + i\,\mathbf{B}_0(\mathbf{r}).\nabla\phi(\mathbf{r})$
or le premier terme est négligeable devant le second et il reste :
-> $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}).\nabla\phi(\mathbf{r}) = 0$ (1)

Pour la même raison on aura :
$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}).\nabla\varphi(\mathbf{r}) = 0$ (2)

Enfin en utilisant :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad -> \quad \phi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) \quad -> \quad \nabla\phi(\mathbf{r}) x \mathbf{E_0} = -c\ \mathbf{B_0} \qquad (3)$$
$$\mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad -> \quad -c\nabla\phi(\mathbf{r}) x \mathbf{B_0} = n^2\ \mathbf{E_0} \qquad (4)$$

On en conclut donc que :

: l'onde a « localement » la structure d'une onde plane avec **E , B** $\nabla\varphi(\mathbf{r})$ formant les trois vecteurs d'un trièdre direct , comme dans le vide .
: le vecteur de Poynting qui détermine la trajectoire de l'énergie est donc parallèle au vecteur $\nabla\varphi(\mathbf{r})$ qui joue le rôle de vecteur d'onde local , en grandeur et en direction
: soient dans l'espace deux surfaces équiphases Ψ_1 et Ψ_2 ; au même instant :

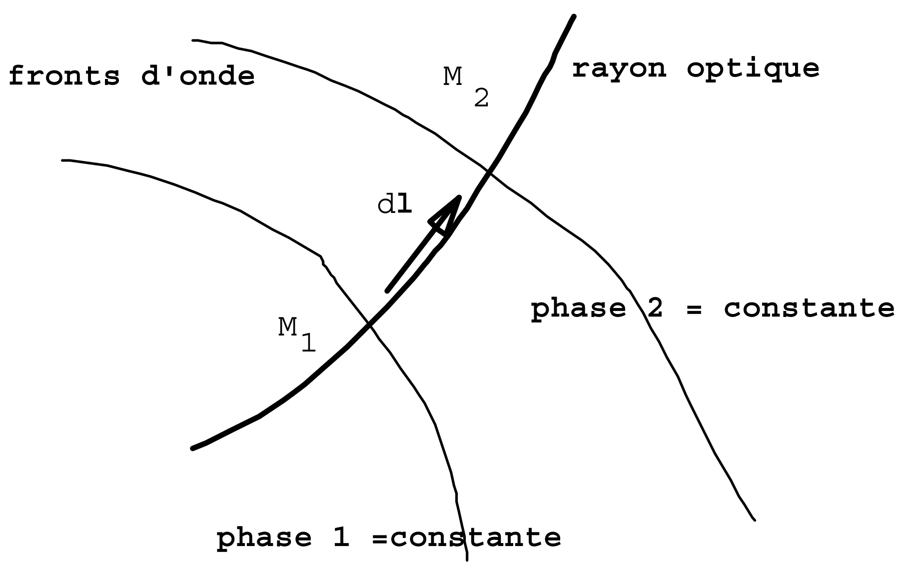
$$\psi_1 = \psi_0 - \omega t + \varphi_1(\mathbf{r}) \qquad\qquad \psi_2 = \psi_0 - \omega t + \varphi_2(\mathbf{r})$$

le long de la trajectoire du rayon on aura :

$$[\varphi_2(\mathbf{r}) - \varphi_1(\mathbf{r})] = \int_{M_1}^{M_2} \nabla\varphi(\mathbf{r}).d\mathbf{l}(\mathbf{r}) = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{q}(\mathbf{r}).d\mathbf{l}(\mathbf{r}) = q_0 \int_{M_1}^{M_2} n(\mathbf{r})\, dl(\mathbf{r})$$

on écrit dans la plupart des manuels :

$$\int_{M_1}^{M_2} n(\mathbf{r})\, dl(\mathbf{r}) = S(M_1,M_2)$$



La quantité $S(M_1,M_2)$ s'appelle " le chemin optique " entre les deux points M_1 et M_2 ; cette quantité obéit à l'équation de l'éikonale : $(\nabla S)^2 = n^2(\mathbf{r},\omega)$.

: si l'indice optique du milieu varie d'un point à un autre (inhomogénéité) les rayons lumineux ont des trajectoires curvilignes ; les surfaces S = constante sont les mêmes que les surfaces équiphases , et les rayons lumineux leur sont perpendiculaires . (penser par analogie à l'électrostatique : équipotentielles et lignes de champ)
: si l'on désigne le vecteur unitaire **s** par

$\mathbf{s} = \dfrac{\nabla S}{n}$ et **r(s)** un point quelconque d'un rayon : $d\mathbf{r} = \mathbf{s}\, ds$ on a : $n\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla S$.

En différentiant cette équation on obtient la « forme vectorielle des trajectoires » :

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}.\nabla\right)\nabla S =$$

$$\frac{1}{n}\sum_i \frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla S = \frac{1}{n}\sum_i \frac{\partial S}{\partial x_i}\nabla\frac{\partial S}{\partial x_i} = \frac{1}{2n}\nabla\sum_i\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 = \nabla n$$

soit :

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n}$$

- cas particuliers

: si n=constante , on a bien : $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0$ -> $\mathbf{r} = \mathbf{a}\, s + \mathbf{b}$, ce qui signifie que le rayon est rectiligne .

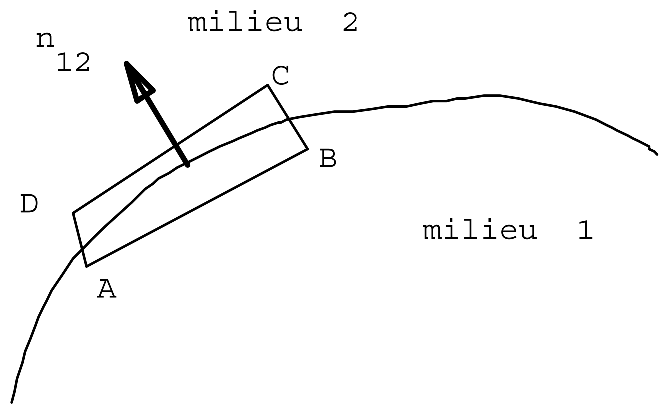
: autre exemple : si n=constante on peut choisir S = nr et les surfaces d'onde sont des sphères !

: autre exemple : déduction de la loi de la réfraction ; soit en effet un dioptre . Il résulte de l'équation eïkonale que :

$$n\frac{d\mathbf{r}}{ds} = n\,\mathbf{s} \quad \rightarrow \quad \mathbf{rot}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \mathbf{rot}\,(n\mathbf{s}) = 0$$

et en appliquant toujours le même théorème : $\displaystyle\int_{\mathbf{C}} n\mathbf{s}\,.\,\mathbf{dl} = 0$

c'est à dire que pour un contour tracé à l'nterface de deux milieux : (C) = AB+BC+CD+DA



cette intégrale revient à écrire (comme pour la continuité de la composante tangente du champ électrique au premier chapitre) :

$$\mathbf{n_{12}} \times (n_2 \mathbf{s}_2 - n_1 \mathbf{s}_1) = 0 \quad \rightarrow \quad n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

En d'autres termes la composante tangentielle du rayon vecteur n**s** est continue à travers la surface .

= Invariant de Lagrange ; principe de Fermat

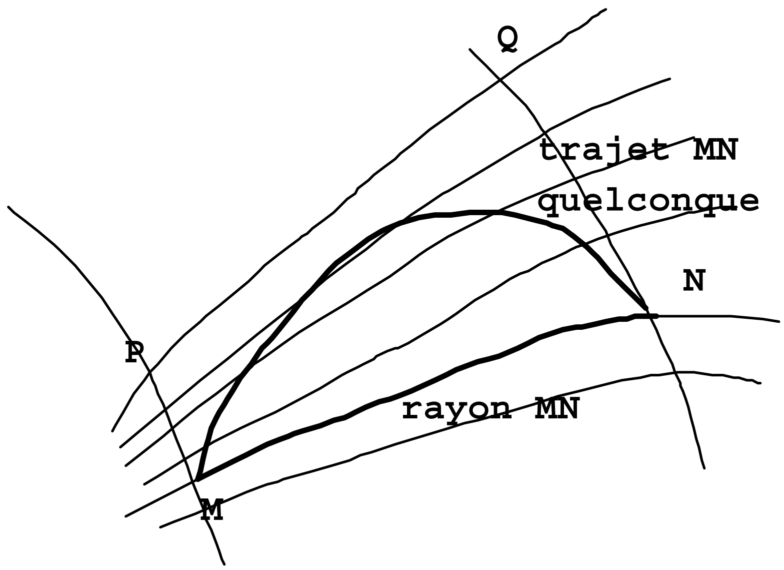
Le rayon lumineux satisfait à l'équation $n\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla S$; il en résulte que , comme pour tout vecteur qui s'exprime par le gradient d'un scalaire (ici S), l'intégrale entre deux points M et N est indépendante du chemin parcouru (voir champ électrique et potentiel électrique) ; de plus , comme pour les lignes de champ , deux rayons ne peuvent se croiser . On a donc des faisceaux qui en chaque point sont orthogonaux aux surfaces S=Constante . (dans le jargon topologique on appelle cela « congruence normale ») .

On montre alors que si l'on prend deux points M et N d'un même rayon , tout trajet partant et arrivant aux mêmes points , mais tracé dans le milieu inhomogène voisin correspondond à un « trajet optique » supérieur à celui du rayon vrai ; c'est le principe de Fermat . L'inégalité suivante est toujours vérifiée :

$$\left.\int_{\mathbf{M}}^{\mathbf{N}} n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r}\right|_{\text{rayon}} < \left.\int_{\mathbf{M}}^{\mathbf{N}} n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r}\right|_{\text{trajet quelconque}}$$

On peut ajouter qu'il n'y a égalité que si en tout point **s** et **r** coïncident .

- Application : réflexion à la surface d'un miroir
- Application : le trajet optique entre deux fronts d'onde est le même pour tout rayon qui joint ces deux surfaces (voir figure : rayons MN et PQ)



- application : théorème de Malus et Dupin : une congruence normale restera normale après un nombre fini de réfractions ou réflections