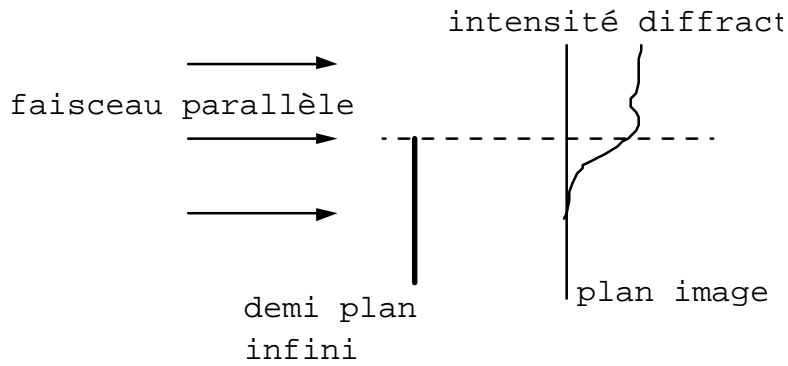
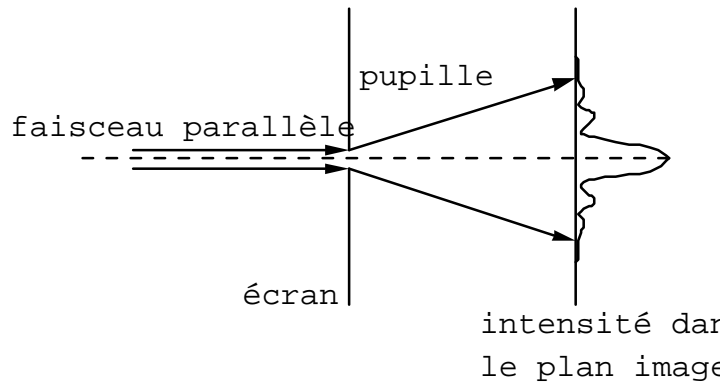


## CHAPITRE V

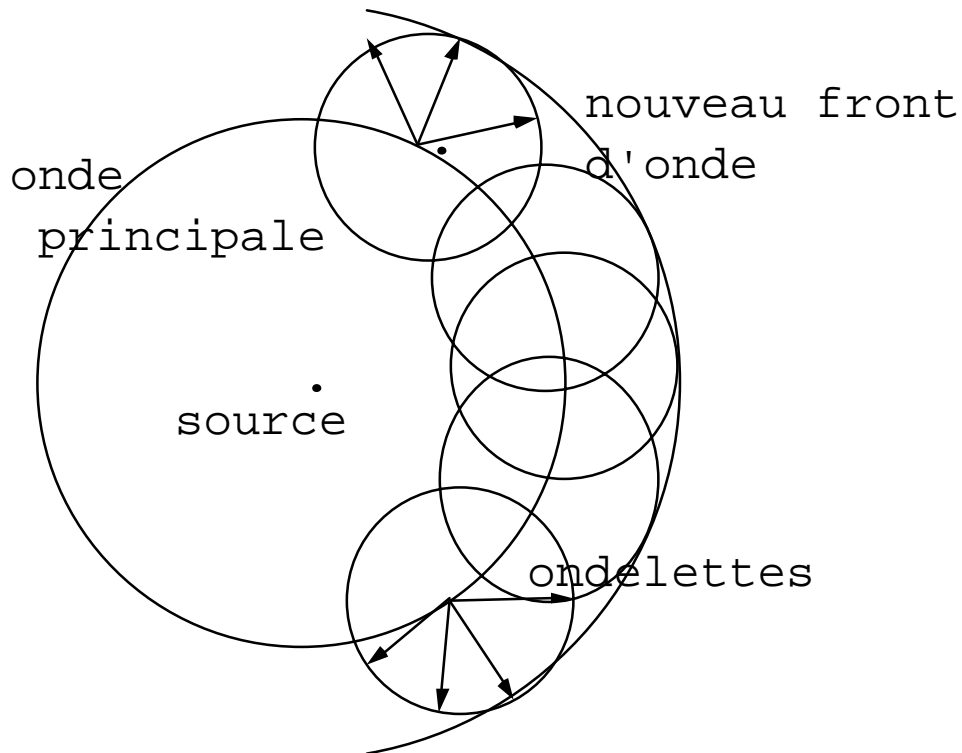
### La diffraction de la lumière

On s'oriente dans ce chapitre plus directement vers le domaine de "l'optique physique" par opposition à "l'optique géométrique". On examinera en effet les conséquences de la longueur d'onde finie des ondes par rapport aux objets qu'elles rencontrent : des pupilles, des bords, des fentes .... Si les fréquences des ondes s'étendent de  $3 \cdot 10^{13}$  c/s, aux frontières de l'infrarouge, jusqu'à  $10^{15}$  c/s en dépassant l'ultraviolet les longueurs d'onde s'étalent de 10 microns à une fraction de micron ; encore que les principes que nous allons établir régissent aussi les ondes millimétriques de la radio astronomie ou les ondes radios, nous nous exprimerons en termes d'optique pour "simplifier" le langage.

Le problème abordé dans ce chapitre est celui de la diffraction. La question se pose ainsi : lorsqu'une pupille est illuminée par un pinceau optique parallèle, sur un écran placé derrière on observe, en première approximation, une tache lumineuse qui a la forme exacte de la pupille ; d'où cette idée très ancienne : la lumière se propage en ligne droite (dans le vide) et la construction des images est un problème de géométrie. Cette idée était d'ailleurs confortée par ce que l'on croyait être la nature corpusculaire de la lumière ; sans obstacle, les "grains" de lumière se propagent en ligne droite. En regardant de plus près, on constate que ce n'est pas si simple : toute pupille fait apparaître des taches ou des lignes de lumière dans une zone qui devrait normalement être ombrée totalement : c'est un effet de "diffraction". Pour se rendre compte que ce phénomène est général il fallait s'affranchir de la représentation "mécaniste" de la lumière et lui donner une nature ondulatoire, notion qui n'apparaît qu'au début du siècle dernier ; il fallait aussi pouvoir faire des expériences évidemment plus délicates.



Huygens ( un hollandais , en 1690 ) , le premier , formule ce qui est une règle pratique pour prévoir la propagation de l'onde diffractée : “ chaque élément d'une surface d'onde peut être regardé comme le centre d'une perturbation secondaire qui donne naissance à de nouvelles ondelettes sphériques ; la position de la surface d'onde à un instant postérieur est l'enveloppe de toutes ces ondelettes ” .



Mais c'est Fresnel, vers 1800, qui met en équation ce principe, puisqu'il s'était rallié à la théorie ondulatoire de la lumière.

### Principe de Huygens-Fresnel

Nous cherchons à appliquer le principe de Huygens pour exprimer l'amplitude d'une onde en un point quelconque de l'espace en appliquant la "règle des ondelettes".

On part d'une source ponctuelle (voir figure ci dessous) placée au point  $O$  et l'on cherche l'amplitude de l'onde en  $P$ ; sachant que l'onde émise par  $O$  rayonne de manière sphérique, en tout point  $M$  de cette surface d'onde la phase  $\varphi$  est la même et l'amplitude du champ  $E(M)$  est proportionnelle à :

$$E(M) = \frac{\exp[ ik_0 r_{OM} + \varphi ]}{r_{OM}}$$

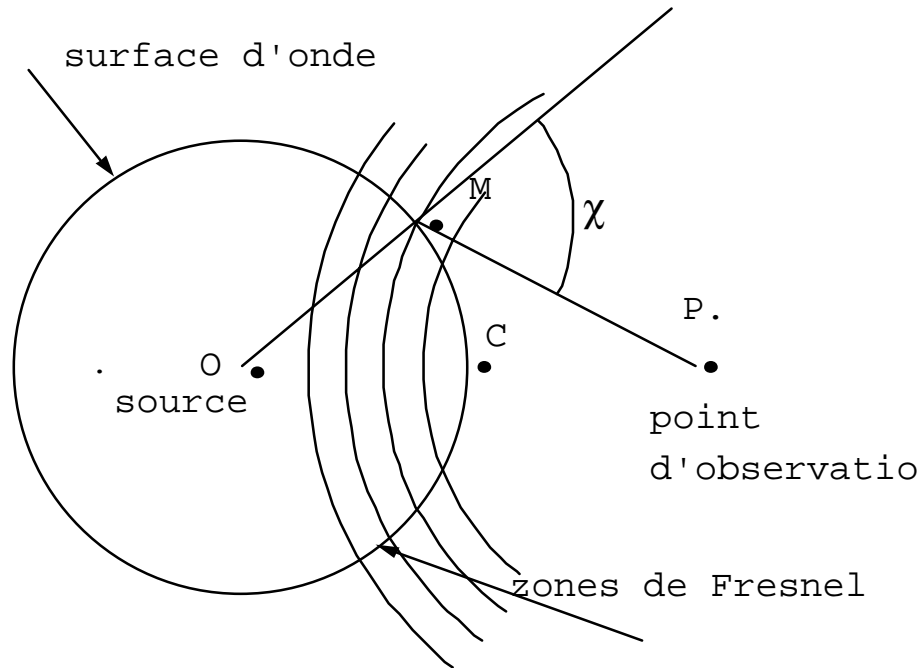
on désigne par  $ds(M)$  un petit élément de la surface d'onde sphérique; si cette surface à son tour rayonne sphériquement, l'onde reçue en  $P$  et issue de cette petite surface sera :

$$dE(P) = E(M) \frac{\exp[ ik_0 r_{MP} ]}{r_{MP}} K(\chi) ds(M)$$

$K(\chi)$  est un facteur qui traduit l'émission d'onde dans la direction du point P à partir de M. En principe donc, le champ en P est la somme de toutes ces contributions soit :

$$E(P) = \int \frac{\exp[ik_0 r_{OM} + \varphi] \exp[ik_0 r_{MP}]}{r_{OM} r_{MP}} K(\chi) ds(M)$$

la somme s'étend à la partie de la surface (S) qui reste en vision directe du point P.



Fameuse intégrale ! mais son calcul a été fait ; de même, la fonction  $K(\chi)$  a été calculée. Mais ce sont de fastidieux calculs que l'on ne reproduira pas. Cela étant le postulat de Huygens est bien vérifié ; on en donnera une version " améliorée " plus loin.

Une jolie confirmation expérimentale du type de calculs qu'il faut faire est donnée ci dessous ; cette expérience fit grand effet sur les physiciens de l'époque et les convainquit tous de la véracité de la théorie ondulatoire. Reprenons la figure de la construction de Fresnel ci dessus ; supposons que le premier cercle tracé depuis P ait un rayon égal à  $CP + \lambda/2$  ; pour les cercles successifs on augmente leur rayon à chaque fois d'une quantité  $\lambda/2$  ; on stoppe ce découpage lorsque le rayon issu de P qui définit des zones sur (S) est tangent à cette sphère ; on a ainsi découpé dans la sphère de rayon OM des zones dites de Fresnel. Le théorème de Huygens invite à sommer les contributions de ces différentes zones.

L'expérience démonstrative est la suivante : supposons que l'on place perpendiculairement à OP un disque dont le diamètre est celui de la première zone ; l'expérience montre qu'il y a de l'intensité lumineuse en P alors que P devrait être dans l'ombre dans une conception corpusculaire de la lumière ; en plus elle montre que cette intensité est la même que

s'il n'y avait pas de disque ! ou encore , si le diamètre du disque est progressivement agrandi tout en restant dans une position fixe , l'intensité lumineuse en P passe par des maxima et des minima ! qui correspondent aux obturations successives des zones de Fresnel sur ( S ) .

Ainsi le point de vue de Huygens-Fresnel était-il conforté .

### **Théorie de la diffraction de Kirchhoff**

La théorie de la diffraction de Kirchhoff prétend mettre sous une forme mathématiquement correcte le principe de Huygens-Fresnel . Elle fournit une expression générale pour calculer la diffraction par des écrans. Elle est basée sur le théorème de Kirchhoff que nous démontrons d'abord .

= théorème de Kirchhoff

Il s'applique à des fonctions  $f(\mathbf{r}, t)$  qui sont solutions des équations de propagation à trois dimensions :

$$\Delta f(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

On va montrer que la fonction  $f(\mathbf{r}, t)$  en tout point  $\mathbf{r}$  intérieur à une surface fermée ( S ) s'exprime analytiquement en fonction des valeurs de  $f$  et de ses dérivées **sur cette surface** .

- première étape : on résoud d'abord le problème pour des fonctions " monochromatiques " issues d'une analyse de Fourier de  $f(\mathbf{r}, t)$  :

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int f(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

de sorte que l'on est face au problème équivalent : trouver  $f(\mathbf{r}, \omega)$  tel que :

$$\Delta f(\mathbf{r}, \omega) + k^2 f(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

Soit alors ( S ) une surface qui entoure un volume ( V ), et  $g(\mathbf{r}, \omega)$  une autre fonction qui obéit à la même équation différentielle ; si  $f(\mathbf{r}, \omega)$  et  $g(\mathbf{r}, \omega)$  sont continues ainsi que leurs dérivées premières et secondes dans ( S ) , on a montré au premier chapitre que :

$$\int_{(V)} [f(\mathbf{r}, \omega) \Delta g(\mathbf{r}, \omega) - g(\mathbf{r}, \omega) \Delta f(\mathbf{r}, \omega)] dv(\mathbf{r}) =$$

$$\int_{(S)} [f(\mathbf{r}, \omega) \nabla g(\mathbf{r}, \omega) - g(\mathbf{r}, \omega) \nabla f(\mathbf{r}, \omega)] ds(\mathbf{r}) = 0$$

cette dernière intégrale est bien nulle puisque  $f$  et  $g$  satisfont à la même équation mais à condition que les gradients soient pris le long d'une normale en tout point de  $(S)$ , sortant de  $(V)$  et pourvu que  $f$  et  $g$  soient régulières partout.

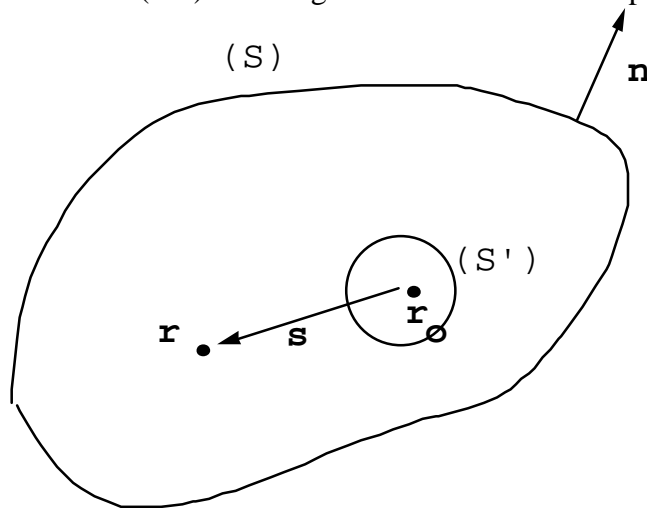
- supposons maintenant que l'on choisisse pour  $g$  la fonction

$$g(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\exp(iks)}{s}$$

où  $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  ;  $\mathbf{r}_0$  est un point quelconque situé à l'intérieur de  $(S)$  ; ce choix est ennuyeux car pour  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  la fonction  $g(\mathbf{r}, \omega)$  est singulière ; pour éviter cet ennui on entoure donc le point  $\mathbf{r}_0$  d'une petite sphère  $(S')$  de rayon  $\epsilon \rightarrow 0$  et le théorème précédent continue de s'appliquer avec la formule :

$$\int_{(S)} + \int_{(S')} = 0$$

sous réserve que la normale sur  $(S')$  soit dirigée vers l'intérieur de la petite sphère.



L'intégrale  $\int_{(S')}$  se calcule directement ; en effet :  $\epsilon$  étant petit ( $\epsilon \rightarrow 0$ )  $f$  est constant sur

$(S')$  et l'élément de surface  $ds'(\mathbf{r})$  s'exprime à l'aide de l'angle solide d'où l'on voit cette surface depuis  $\mathbf{r}_0$  :

$ds'(\mathbf{r}) = \epsilon^2 d\Omega$  d'où :

$$\int_{(S')} = \int_{(S')} \left[ f \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(iks)}{s} \right) - \frac{\exp(iks)}{s} \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds'$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{(S')} \left[ f \frac{\exp(iks)}{s} \left(-ik + \frac{1}{s}\right) - \frac{\exp(iks)}{s} \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds' \\
&= \int_{(\Omega)} \left[ f \frac{\exp(ik\varepsilon)}{\varepsilon} \left(-ik + \frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{\exp(ik\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial n} \right] \varepsilon^2 d\Omega
\end{aligned}$$

Dans cette dernière intégrale le premier et le dernier terme tendent vers 0 avec  $\varepsilon$  et le deuxième fournit :  $4\pi f(\mathbf{r}_0, \omega)$

On a ainsi démontré le résultat :

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_0, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \left\{ f(\mathbf{r}, \omega) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(iks)}{s} \right) - \frac{\exp(iks)}{s} \frac{\partial}{\partial n} [f(\mathbf{r}, \omega)] \right\} ds(\mathbf{r})$$

Ce théorème est remarquable car il permet d'exprimer  $f$  en tout point  $\mathbf{r}_0$  intérieur à  $(S)$  en fonction des valeurs de  $f$  et de son gradient sur toute la surface  $(S(V))$  qui entoure  $(V)$

- on peut particulariser le théorème pour  $k=0$  soit :

$$f(\mathbf{r}_0, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \left\{ f(\mathbf{r}, \omega) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{s} \right) - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial n} [f(\mathbf{r}, \omega)] \right\} ds(\mathbf{r})$$

moyennant quoi on retrouve une solution de l'équation de Poisson en tout point intérieur à  $(S)$  lorsque le potentiel en même temps que le gradient (c'est à dire la densité de charges à la surface d'un conducteur par exemple) sont fixés sur la surface.

- la dernière étape consiste à effectuer en sens inverse la transformée de Fourier pour retrouver des fonctions dépendant du temps (en se souvenant que  $k = \omega / c$ )

$$f(\mathbf{r}_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int f(\mathbf{r}_0, \omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{1}{2\pi} \int_{(\omega)} \left\{ f(\mathbf{r}, \omega) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp[i\omega(s/c - t)]}{s} \right) - \frac{\exp[i\omega(s/c - t)]}{s} \frac{\partial}{\partial n} [f(\mathbf{r}, \omega)] \right\} ds(\mathbf{r}) d\omega$$

on peut changer l'ordre des intégrations et obtenir :

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{1}{2\pi} \int_{(\omega)} \left\{ f(\mathbf{r}, \omega) \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{s} \right) + \frac{i\omega}{sc} \frac{\partial s}{\partial n} \right] \exp[i\omega(s/c - t)] - \frac{\exp[i\omega(s/c - t)]}{s} \frac{\partial}{\partial n} [f(\mathbf{r}, \omega)] \right\} ds(\mathbf{r}) d\omega$$

$$f(\mathbf{r}_0, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \left\{ f(\mathbf{r}, t - s/c) \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{s} \right) - \frac{1}{sc} \frac{\partial s}{\partial n} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, t - s/c) \right] - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial n} [f(\mathbf{r}, t - s/c)] \right\} ds(\mathbf{r})$$

avec  $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$

Ainsi est démontré le théorème de Kirchhoff . Fort général il dépasse le cadre de la physique de la diffraction . On a vu en passant qu'il donnait une solution analytique au théorème de Poisson .

= Applications au cas des ondes monochromatiques .

Nous imaginons la situation suivante : une source en un point origine O émet une onde sphérique ; une partie de l'onde passe à travers une pupille S(1) et nous cherchons à exprimer l'onde reçue en un point P situé derrière la pupille ; nous constituons une surface fermée (S) autour de P à l'aide de plusieurs éléments : un morceau de sphère S(3) centrée sur P , une surface S(2) située contre le plan de la pupille et enfin S(1) , une surface qui s'appuie sur les bords de la pupille . On suppose , afin de pouvoir observer la diffraction , que la pupille est grande devant la longueur d'onde et petite devant ses distances à O et P . Les hypothèses de calcul , très physiques , sont :

: sur S(1) les valeurs de l'amplitude et des dérivées spatiales de l'onde sphérique diffèrent peu , qu'il y ait écran ou pas :

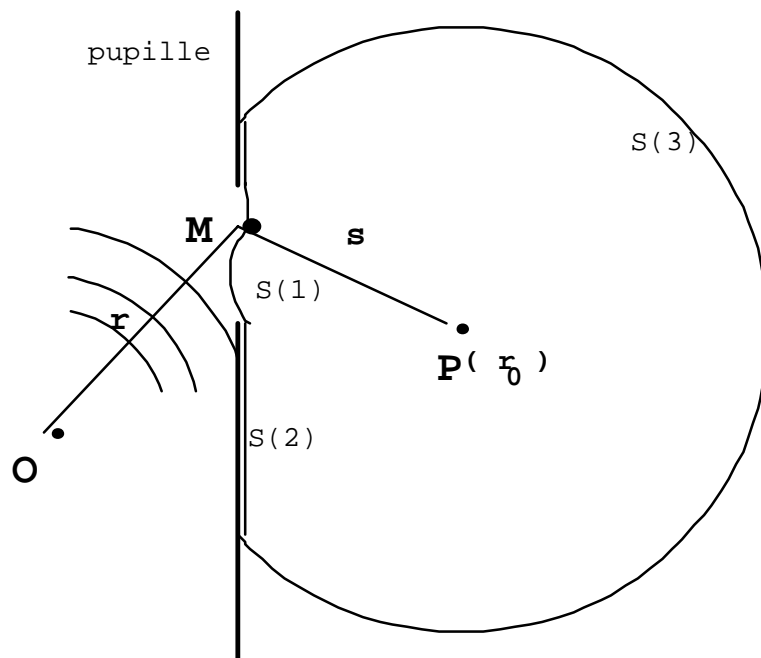


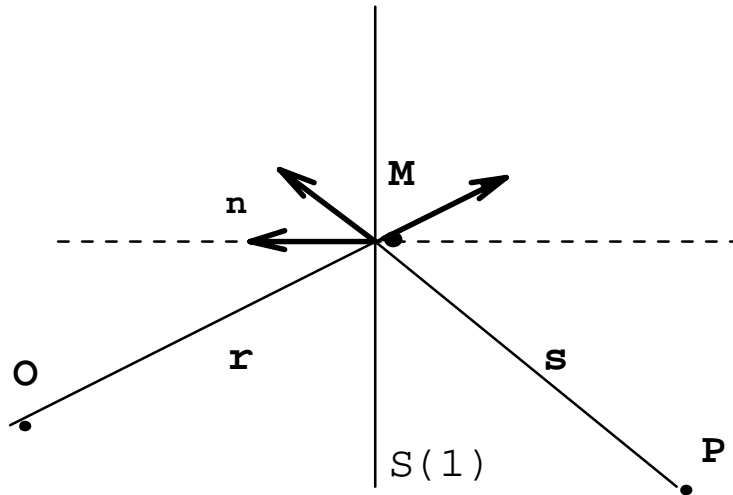
$$f(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{r} = \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{r} \left( i\mathbf{k} - \frac{1}{r} \right) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{s})}{s} = \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{s})}{s} \left( i\mathbf{k} - \frac{1}{s} \right) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{s})$$

: sur S(2) l'amplitude de l'onde est nulle  
 : quant à S(3), que l'on peut prendre de rayon  $\rightarrow$ infini, l'amplitude tendra aussi vers zéro.





En reportant dans la solution de Kirchhoff , en tenant compte des notations données dans la figure ci dessus et de l'approximation  $kr \gg 1$  et  $ks \gg 1$  on trouve le résultat :

$$f(\mathbf{r}_0, \omega) = \frac{i}{2\lambda} \int_{S(1)} \frac{\exp[i\omega(r+s)/c]}{rs} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{s})] ds(\mathbf{r})$$

Certes , cette démonstration passe rapidement sur quelques difficultés mathématiques : qu'advient-il sur  $S(3)$  même à l'infini , et sur  $S(2)$  ...; d'autre part on a traité de la diffraction comme s'il s'agissait d'un champ scalaire alors que l'onde optique a un caractère vectoriel ! en fait tout se passe bien car les dimensions des pupilles sont très grandes devant les longueurs d'onde ; il n'en irait pas de même pour la diffraction des ondes électromagnétiques de fréquences radio ou hyper par la même pupille ; on laissera ces points de côté .

En optique , on partira de cette formule , quelles que soient les approximations physiques que l'on fera ensuite pour s'adapter aux conditions expérimentales .