

CHAPITRE VI

Electromagnétisme dans la matière

Position du problème

Pourquoi se reposer la question de l'électromagnétisme dans la matière puisque toutes ses lois ont été établies, que les équations de Maxwell donnent de bonnes solutions à tous les problèmes et que la matière, n'est pas autre chose que beaucoup de vide où il y a une certaine organisation des charges électriques en amas (atomes) ou en amas d'amas (cristaux).

Première remarque : pour sonder le champ électrique on utilise une charge ponctuelle : mais le champ électrique de cette charge a-t-il un effet perturbant sur l'état de la matière ? En effet, si on introduit un électron au voisinage d'un atome, on ne mesure pas simplement le champ qui règne en ce point car, approcher cet électron, "polarise" l'atome ; la densité électronique est perturbée, il apparaît un moment multipolaire et la réponse est bien plus compliquée que prévu : cet électron n'est pas seulement une sonde qui perturbe infiniment peu le système observé (comme ce devrait être) ; il modifie la distribution électronique dans l'atome ; la même remarque s'applique si l'on approche une spire élémentaire d'un atome à électrons non appariés : le moment magnétique de l'atome est modifié par la spire.

Deuxième remarque : bien souvent, les propriétés de la matière au niveau microscopique (atomique) ne sont pas pertinentes pour le problème que l'on cherche à examiner ; c'est le cas lorsque l'on propage une onde optique dans un milieu transparent : à l'échelle de la longueur d'onde le détail de la structure atomique n'est probablement pas très important ; il suffit de connaître les propriétés à une échelle moyenne et de considérer le milieu matériel comme un continuum. La difficulté c'est qu'il faut bien, un jour, raccorder les deux approches.

Troisième remarque : si les lois de l'électromagnétisme dans le vide restent valables à une échelle microscopique , il y a tellement de singularités dans ce milieu (positions des charges ponctuelles) que la solution d'un problème est inextricable , d'autant que ces charges sont en mouvement et qu'elles doivent être traitées , en plus , dans le cadre de la mécanique quantique .

Il faut donc trouver une autre voie d'approche et le souhait est de traiter le milieu comme un continuum quitte à en payer le prix par une " adaptation " des lois de l'électromagnétisme ; ou plutôt , car les lois déjà établies restent valables , il faut introduire des grandeurs additionnelles par rapport à \mathbf{E} et \mathbf{B} qui rendront la solution des problèmes à échelle intermédiaire plus facile .

Si l'on reprend cette idée que chaque atome est polarisable , c'est à dire que le cortège électronique se déforme sous l'action d'un champ extérieur pour finir par donner un dipôle , dans un modèle continu , chaque élément de volume comprendra des charges libres , une densité de dipôles électriques (ou magnétiques) , des multipôles

Modèles de diélectrique ; définition des divers champs électriques

= Introduction à un point de vue microscopique sur les moments dipolaires électriques

Dans un diélectrique on considère donc des charges ponctuelles , des dipôles ..
On admet en général que les charges comme les dipôles ne sont pas susceptibles de se déplacer ; le seul degré de liberté des dipôles est de pouvoir s'orienter de manière à minimiser leur énergie dans le champ électrique total qu'ils subissent .

Quelle est la nature de ces dipôles ?

- On en rencontre de nature électronique ;

On a mentionné les atomes qui ayant un centre de symétrie n'ont pas de moment électrique permanent avant l'application d'un champ ; il en est de même pour les molécules symétriques (hydrogène , CH_4 , .. SO_2) . L' application d'un champ extérieur ou le voisinage d'une charge-test déforme le nuage électronique , la densité électronique moyenne et induit un moment multipolaire . Tant que l'on n'applique pas de champs trop grands qui seraient susceptibles d'arracher les électrons , le moment électrique \mathbf{p} (\mathbf{E}) qui apparaît pour chaque édifice dans un champ \mathbf{E} est , en première approximation (linéaire) :

$$\mathbf{p}(\mathbf{E}) = \alpha \mathbf{E}$$

α s'appelle la polarisabilité ; c'est un coefficient qui dans certains cas doit être écrit sous la forme d'un tenseur d'ordre deux (comme il convient , de manière générale lorsque l'on écrit la proportionnalité entre deux vecteurs) ; la polarisabilité est une propriété qui est spécifique à chaque édifice microscopique ; elle traduit son aptitude à être déformé sous l'influence d'un champ et à acquérir un moment permanent sous l'influence d'un champ permanent . On dit que le moment dipolaire est " induit " . La formule suppose aussi qu'à l'échelle de chaque édifice le champ électrique appliqué soit uniforme .

Pour un volume élémentaire dv (\mathbf{M}) on définira une densité de moment dipolaire \mathbf{P} (\mathbf{M}) par la relation :

$$\{ \mathbf{p} [\mathbf{E}(\mathbf{M})] n(\mathbf{M}) \} dv(\mathbf{M}) = \mathbf{P}(\mathbf{M}) dv(\mathbf{M})$$

où $n(\mathbf{M})$ est le nombre de dipôles par unité de volume en \mathbf{M} (édifices semblables) ;

- On rencontre des dipôles de nature ionique ;

Lorsqu'un cristal est formé d'atomes peu polarisables (un cristal ionique composé d'ions Na^+ Cl^- F^- Ca^{++} ), sous l'action d'un champ extérieur, ces ions se déplacent de leur position moyenne d'équilibre ; il y a séparation des centres de gravités des ions $+$ et des ions $-$ et apparition d'un moment dipolaire. Dans ce cas comme dans le cas précédent on a une polarisation "induite" ou de "déplacement".

- Il y a des milieux (liquides, gaz, molécules d'eau dans un solide ...) constitués d'édifices ayant un moment permanent \mathbf{p}_0 ; il est susceptible de changer d'orientation dans l'espace ; le cas le plus fameux est l'eau. En l'absence de champ appliqué, les molécules sont orientées dans toutes les directions avec une égale probabilité ; à une échelle spatiale et temporelle moyenne le moment électrique par unité de volume est nul. Inversement, l'application d'un champ favorise statistiquement certaines orientations qui minimisent l'énergie de chaque molécule ; il apparaît un moment moyen par unité de volume ; en raison de cette statistique, ce moment moyen dépend en général de la température au contraire des moments induits.

= Une expérience démonstrative

On considère une capacité C avec le vide entre les armatures ; si l'on remplit le volume entre les armatures par un diélectrique, on constate que la capacité est multipliée par un facteur qui ne dépend que de la nature du matériaux. $C \rightarrow C' = \epsilon_r C$

ϵ_r se nomme la "constante diélectrique relative" du matériau par rapport au vide ; c'est un facteur numérique toujours >1 .

Reprenons la capacité vide à laquelle on applique un potentiel V ; la densité de charges sur une électrode est :

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{CV}{S} = \frac{C}{S} E l = \epsilon_0 E$$

l étant la distance entre électrodes ; supposons qu'après avoir appliqué V , on isole la capacité ; la densité de charges libres sur l'armature reste la même. On introduit ensuite un diélectrique entre les armatures ; puisque la capacité est devenue $C' > C$ alors que les charges libres des armatures sont restées constantes,

$$\sigma = \frac{C' V'}{S} = \frac{C}{S} \epsilon_r V' = \frac{C}{S} \epsilon_r E' l$$

le champ entre les électrodes est donc devenu $E' = E/\epsilon_r$; il a diminué ; ou encore, puisque sur les électrodes σ est restée constante il faut bien que des "charges nouvelles" soient apparues qui "s'ajoutent" à σ : $\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma/\epsilon_r$; on peut appliquer le théorème de Gauss pour s'en persuader ; ces charges nouvelles sont dites "charges de polarisation".

$$\sigma' = \sigma + \sigma_{\text{pol}} \quad \rightarrow \quad \sigma_{\text{pol}} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma$$

On modélise ce qui se passe en imaginant qu'une densité de dipôles est apparue dans le diélectrique ; cette densité volumique est uniforme pour satisfaire à la symétrie du système ; ces

dipôles sont tous orientés de manière à diminuer la charge effective totale portée par les électrodes . On apprendra à les calculer dans la suite de ce chapitre ; on retiendra ici que ces “ charges de polarisation ” sont toujours négatives .

= Définitions des différents champs électriques présents dans un diélectrique

On appellera :

: “ champ extérieur ” E_{ext} le champ engendré par les charges libres sur les électrodes conductrices qui entourent un diélectrique ; ce sont ces charges qui se déplacent dans les fils de connections des électrodes aux piles

: “ champ microscopique ” $e(\mathbf{M}) = e_q(\mathbf{M}) + E_{ext}$ le champ qui résulte , à l'échelle atomique , d'une part , de la distribution des charges et des dipôles élémentaires dans le diélectrique ($e_q(\mathbf{M})$) et d'autre part , du champ extérieur ; il obéit aux équations de maxwell dans le vide ; c'est de lui que l'on veut s'affranchir puisque son calcul est pratiquement impossible ; ce champ peut varier extrêmement rapidement d'un point à un autre du diélectrique , puisqu'il est défini à l'intérieur comme à l'extérieur des atomes .

: “ champ moyen ” $\langle e(\mathbf{M}) \rangle$ la moyenne dans un volume élémentaire du champ microscopique ; reste à savoir à quelle échelle spatiale on doit faire cette moyenne ; il y a là une part de convention .

: “ champ de polarisation ” E_{pol} le champ qui naît du fait d'une densité moyenne de dipôles dans le volume du diélectrique ; c'est un champ qui résulte de l'agencement spatial des dipôles : position et orientation ; la difficulté , c'est que sa valeur , par effet inverse , conditionne aussi l'orientation de ce champ . Son calcul est donc compliqué .

: “ champ macroscopique ” E , ou champ de Maxwell celui qui résulte des deux précédents :

$$E = E_{pol} + E_{ext}$$

: “ champ local ” E_{loc} celui qui s'exerce sur une charge ou un dipôle élémentaire placé en r mais qui résulte de tous les autres dipôles ou charges ; son calcul est fort compliqué si un principe de symétrie ne peut être appliqué car il faut connaître la valeur et l'orientation de tous les dipôles et charges à grande échelle .

Calcul du champ macroscopique E dans un diélectrique ; équations de Maxwell

= Charges équivalentes ; cas statique

On considère un diélectrique de volume V limité par une surface S ; en tout point r de l'espace , extérieur où intérieur au diélectrique , on sait exprimer le potentiel $V(r)$ créé par une densité de charge $\rho(r')$ et une densité de dipôles $P(r')$ placés en r' (formules vue en électrostatique) :

$$V_{\text{dielectrique}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(V)} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(V)} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}')$$

Par un procédé de calcul déjà vu, on sait comment transformer la dernière intégrale ; on obtient :

$$V_{\text{dielectrique}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(V)} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(V)} \frac{\{-\text{div}[\mathbf{P}(\mathbf{r}')]\}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(S)} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{s}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Formule que l'on peut interpréter de la manière suivante : le premier terme du gradient n'existe que si il y a des charges libres dans le diélectrique ; **les deux autres donnent $\mathbf{E}_{\text{pol}}(\mathbf{r})$;**

ce champ est dû à des « charges volumiques équivalentes » : $\tilde{\rho} \rightarrow \mathbf{E}_{\text{pol},V}$

et « surfaciques équivalentes » : $\tilde{\sigma} \rightarrow \mathbf{E}_{\text{pol},S}$

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}') = -\text{div}[\mathbf{P}(\mathbf{r}')]$$

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}')$$

$\mathbf{n}(\mathbf{r}')$ est la normale à la surface (S), orientée vers l'extérieur du volume (V), au point \mathbf{r}' de (S).

Ce résultat, que nous avons déjà rencontré, assure que l'on peut traiter $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\sigma}$ exactement comme des charges libres et que les équations de Maxwell de l'électrostatique et de la magnéto- statique s'appliquent sans changement par rapport à celles que l'on a établies pour le vide et les conducteurs parfaits si l'on fait les substitutions ci dessus.

= régime dépendant du temps

Si l'on veut transposer complètement ces équations à l'électromagnétisme tout en conservant le même formalisme de Maxwell, la charge $\tilde{\rho}$ doit obéir à une loi de conservation ;

le prix à payer oblige à introduire des “ courants équivalents ” $\tilde{\mathbf{j}}$ qui assurent la “ conservation ” des charges fictives ; il faut pouvoir écrire :

$$\text{div} [\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t)] = -\frac{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} ;$$

Après remplacement par la valeur convenue plus haut de $\tilde{\rho}$ on est amené à écrire :

$$\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$$

Dans un diélectrique on aura donc les équations de Maxwell suivantes :

$$\begin{aligned} \text{div} [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] &= 0 \\ \text{div} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] &= \frac{1}{\epsilon_0} [\rho(\mathbf{r}, t) - \text{div}[\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)]] \\ \text{rot} [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] &= \mu_0 [\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}] \\ \text{rot} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

On pourrait en rester là ; mais les physiciens préfèrent conserver aux équations de Maxwell la forme qu’elles ont dans le vide au prix de devoir définir un nouveau champ $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ par la relation :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$$

$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ se nomme , suivant les auteurs et les traditions scientifiques , soit “ déplacement électrique ” , soit “ induction électrique ” , soit “ excitation électrique ” . Du point de vue des dimensions $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ n’est pas homogène à un champ électrique puisqu’il en diffère par ϵ_0

. Les équations de Maxwell prennent alors une forme très analogue à celle qu’elles ont dans le vide :

$$\text{div}[\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = 0$$

$$\text{div}[\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)] = \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\text{rot}[\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = \mu_0 \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right]$$

$$\text{rot}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

Ce choix étant fait, plusieurs conséquences doivent en être tirées :

: dans la troisième des équations précédentes on a introduit un “courant” $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ dont la valeur est différente de celle que l’on a dans le vide ;

: le théorème de Gauss fournit les conditions imposées à $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ à l’interface de deux milieux diélectriques 1 et 2 ; le raisonnement est identique à celui tenu en électromagnétisme ; il résulte des propriétés de la divergence de \mathbf{D} et du rotationnel de \mathbf{E} : la discontinuité normale de \mathbf{D} est égale à la densité de surface ; la discontinuité tangente de \mathbf{E} est nulle car il n’y a pas de courant de surface ; si donc $\mathbf{n}_{1,2}$ est la normale à l’interface, orientée de 1 vers 2, on retrouve :

$$[\mathbf{D}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{D}_1(\mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{n}_{1,2} = \sigma(\mathbf{r}, t)$$

$$[\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)] \times \mathbf{n}_{1,2} = 0$$

On retiendra que la discontinuité de \mathbf{D} est liée à la densité de charges réelles de surface

= Discussion des conditions imposées à \mathbf{D} : exemples

- Supposons qu’un diélectrique (milieu 1) de volume fini, non conducteur, soit dans le vide (milieu 2) ; \mathbf{D} est à flux conservatif car il n’y a pas de charges libres, ni en surface, ni en volume et

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{1,2} = 0;$$

la normale à la surface étant toujours orientée de (1) vers (2), comme $\rho(\mathbf{r}') \equiv 0$ et $\mathbf{P}_2(\mathbf{r}, t) = 0$ (2 est le vide), on en déduit :

$$[\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{n}_{1,2} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}_1(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}_{1,2} \quad \text{ou encore :}$$

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{1,2} = 0$$

$$[\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{n}_{1,2} = \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\sigma}(\mathbf{r}, t)$$

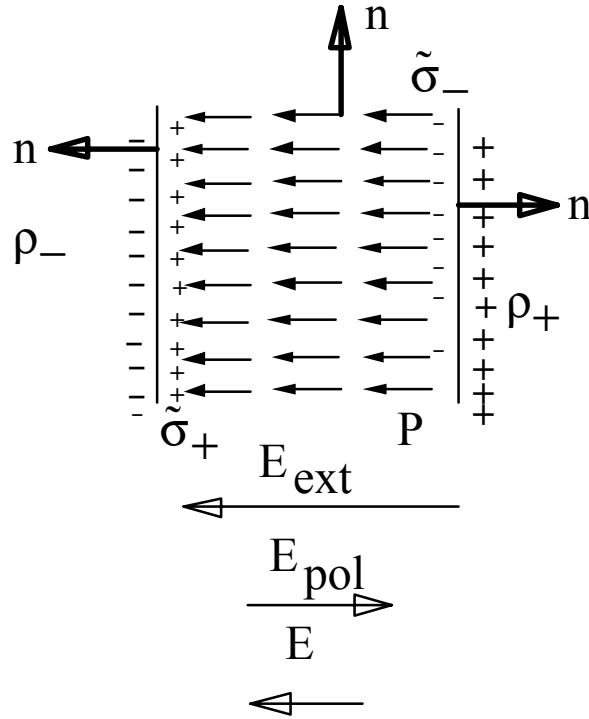
Simultanément \mathbf{B} doit être continu à l'interface des deux diélectriques non conducteurs puisqu'il n'y a pas de courants de surface et que la divergence de \mathbf{B} est nulle .

- Supposons que l'interface soit le couple : diélectrique(1)-métal (2) ; (c'est le cas à l'interface d'un diélectrique et d'une électrode) ; puisque :

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}_{1,2} = \mathbf{P}_2(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}_{1,2} = 0$$

$$-\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}_{1,2} = \frac{1}{\epsilon_0} [\tilde{\sigma}(\mathbf{r}, t) + \sigma(\mathbf{r}, t)]$$

Cette fois ci , c'est la somme des charges réelles et fictives de surface qui assure la discontinuité de \mathbf{E} (attention aux notations et au signe de la normale positive !!!)



- Conséquences :

: à l'interface de deux diélectriques , ou d'un diélectrique et du vide , il y aura réfraction des lignes de champ .

: la somme totale des charges fictives Q' est nulle puisque :

$$Q' = \int_{(V)} \{ - \operatorname{div} [\mathbf{P} (\mathbf{r}')] \} dv (\mathbf{r}') + \int_{(S)} \mathbf{P} (\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{s} (\mathbf{r}') = 0$$

et que par le théorème sur la divergence les deux intégrales sont opposées .

- Application à faire par les étudiants : calculer la distribution de charges équivalentes à une sphère de rayon R dont la densité de polarisation est : $\mathbf{P} (\mathbf{r}) = a \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ (voir aussi le problème résolu dans le paragraphe suivant)

Champ électrique local et modèles de diélectriques

Le calcul du champ local appliqué à un édifice élémentaire est crucial pour relier propriétés macroscopiques et modèles microscopiques ; la question est : **quel est le champ électrique qui , à l'échelle d'un dipôle élémentaire , agit sur lui pour le polariser ou l'orienter ; ou encore : quelles sont toutes les contributions à ce champ qu'il faut additionner** . On résoud le problème dans les conditions suivantes :

- Dans un diélectrique de volume fini , macroscopique , limité pas la surface (S) on creuse autour du point \mathbf{r} une petite cavité de surface (S') entourant (V') , de dimensions assez grandes pour que , vu de \mathbf{r} , le diélectrique puisse être considéré comme un milieu continu avec une densité de dipôles ;

- La disposition géométrique microscopique des dipôles dans la cavité (S') est supposée connue : les dipôles se trouvent aux noeuds d'un réseau cristallin ; à cette échelle ils sont placés dans le vide ;

- A l'intérieur de la cavité les dipôles élémentaires ont tous même orientation ;

La question posée est : quel est le champ en un point de la cavité (S') lorsque l'on a retiré le dipôle qui devrait y être ? on appelle ce champ : " champ local " .

= Expression du champ local

S'il y a des charges extérieures à (V) la première contribution est : \mathbf{E}_{ext} ; son calcul est " simple " et de nature macroscopique ; en général on connaît ce champ .

La polarisation en volume engendre trois contributions : celle qui est liée à $\tilde{\rho}$: $\mathbf{E}_{\text{pol}, V}$; celle qui provient des charges surfaciques en (S) : $\mathbf{E}_{\text{pol}, S}$; celle qui provient des charges surfaciques en (S') : $\mathbf{E}_{\text{pol}, S'}$.

Pour calculer cette dernière on utilise le fait que la polarisation aux alentours de la sphère (S') est à peu près uniforme ; on sait exprimer le champ au centre de la sphère dû aux charges surfaciques sur (S') provenant d'une polarisation uniforme :

$$\mathbf{E}_{\text{pol}, S'} = \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$$

- **Démonstration de la formule précédente**

La démonstration de cette dernière formule est un exercice " classique " en électrostatique ; les étudiants qui s'y attaquent auront appris à résoudre une équation de Poisson au moins une fois dans leur vie ! ce qui fait partie du cursus d'un physicien raisonnable .

On suppose donc une cavité vide , sphérique , de rayon R , creusée dans un milieu infini , porteur d'une polarisation uniforme \mathbf{P} , fixe , orientée dans la direction z ; le centre de la cavité est le centre des coordonnées . La question posée est : exprimer le champ électrique à l'extérieur et à l'intérieur de la cavité .

On peut faire une première réponse en remarquant que si la polarisation par unité de volume \mathbf{P} est uniforme dans le diélectrique , la seule origine du champ électrique est la densité de charge de surface équivalente $\tilde{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})$; en effet , $\tilde{\rho}(\mathbf{r}) = 0$ puisque la polarisation est uniforme ; $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ est la normale à la surface sphérique au point \mathbf{r} , orientée vers l'extérieur de la sphère . La symétrie du problème invite à choisir des coordonnées sphériques pour tout point de l'espace (r, θ, φ) et dans ces notations :

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{r}) = P \cos(\theta)$$

Reste alors à résoudre l'équation de Poisson $\Delta V = 0$ dans les deux portions d'espace : à l'extérieur de la sphère où le potentiel vaudra $V(\mathbf{r})$ et à l'intérieur où il vaudra $V_0(\mathbf{r})$; on cherche des solutions du type :

$$V_0(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + b_n \frac{1}{r^{n+1}}) P_n[\cos(\theta)]$$

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n r^n + d_n \frac{1}{r^{n+1}}) P_n[\cos(\theta)]$$

$P_n[\cos(\theta)]$ est le polynôme de Legendre d'ordre n .

Les conditions de raccordement entre les deux potentiels , imposées par les équations de Maxwell de l'électrostatique doivent être satisfaites en tout point de la surface de la sphère soit :

: continuité du potentiel : $V_0(\mathbf{r}) \equiv V(\mathbf{r})$

: continuité de la composante normale du déplacement électrique : $E_{2N}(\mathbf{r}) - E_{1N}(\mathbf{r}) \equiv -\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})$

: valeurs finies du potentiel à l'infini et au centre de la sphère .

En procédant à l'identification terme à terme des différentes composantes des potentiels , compte tenu de la symétrie , on trouve alors que :

$$V_0(\mathbf{r}) = -\frac{P}{3\epsilon_0} r \cos(\theta) = -\frac{P}{3\epsilon_0} z$$

ce qui signifie que le champ électrique est uniforme à l'intérieur de la sphère et qu'il vaut $\frac{P}{3\epsilon_0}$

Par ailleurs :

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos(\theta) = -\frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-\frac{P}{3} 4\pi R^3) \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

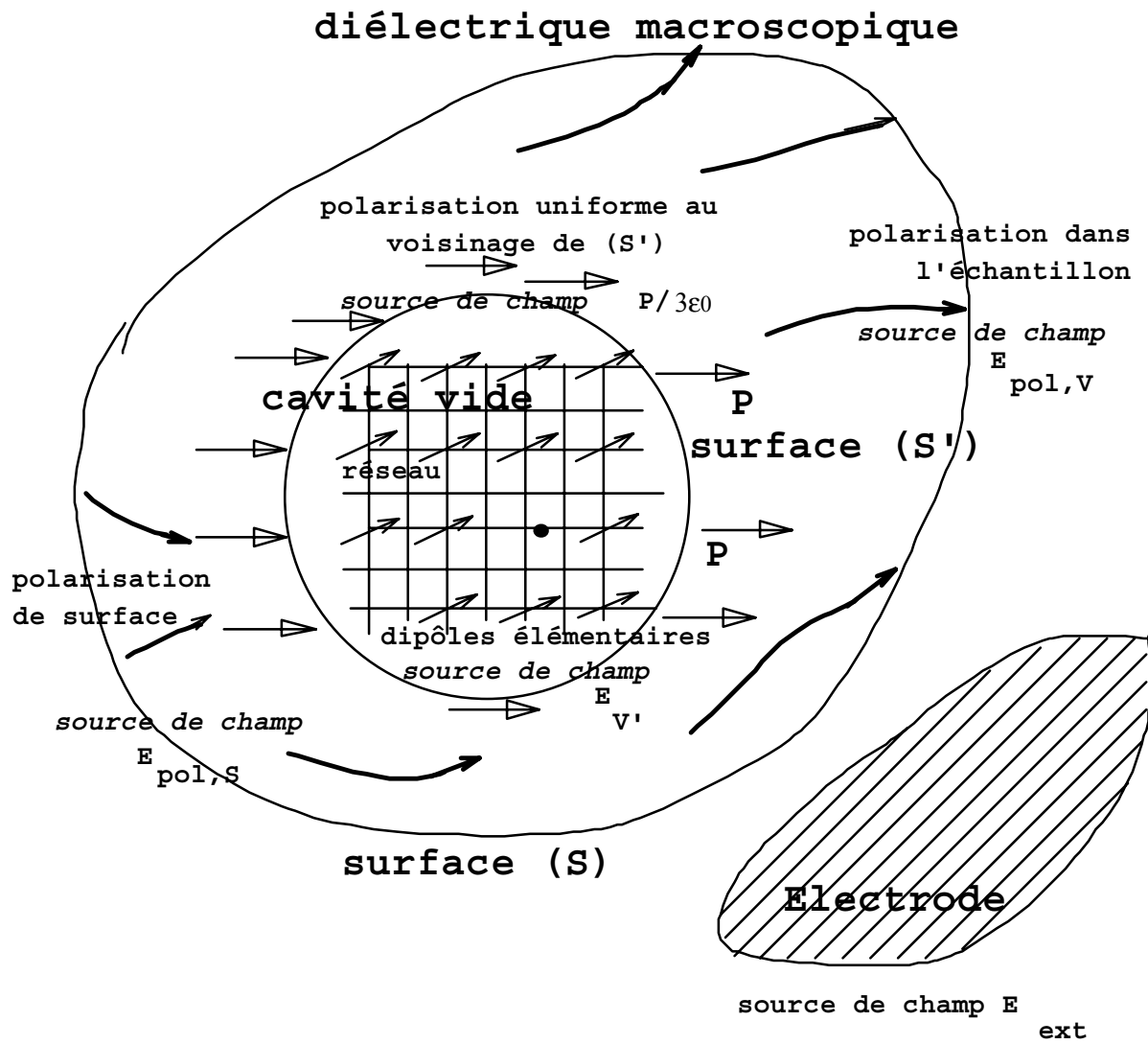
ce qui signifie que le champ électrique à l'extérieur de la sphère est celui créé par un dipôle de valeur $(-\frac{P}{3} 4\pi R^3)$ placé au centre de la sphère

Revenons donc maintenant au calcul du champ local .

La dernière contribution vient des dipôles de la cavité (V') : $\mathbf{E}_{V'}$; on démontre que si les dipôles sont disposés sur un réseau cubique par exemple , et justement parce que (S') est une sphère alors $\mathbf{E}_{V'} = 0$

En général on aura donc :

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{pol,S} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} + \mathbf{E}_{pol,V}$$



A titre d'exemple calculons le champ local pour un cristal cubique placé entre deux électrodes d'un condensateur ; dans cette géométrie la polarisation est uniforme dans le

diélectrique et donc $\mathbf{E}_{\text{pol},V} = 0$; on a $\mathbf{E}_{\text{pol},S} = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}$ comme dans un condensateur et

donc : $\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} - \frac{2}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$ Le champ macroscopique \mathbf{E} vaut dans ce cas :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}} - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} = \mathbf{E}_{\text{loc}} - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$$