

Les milieux magnétiques

La description des milieux magnétiques est d'une certaine façon, très parallèle à celle des milieux diélectriques non conducteurs dans la mesure il n'existe pas de charge libre ; en pratique c'est souvent vrai pour les diélectriques, moins pour les magnétiques : le cas des aimants est typique. La grande différence vient de ce qu'il n'existe que des dipôles permanents ; leur degré de liberté est de pouvoir s'orienter dans un champ extérieur ; les dipôles magnétiques induits (**diamagnétisme**) sont en général très faibles et nous n'aborderons pas leur description ..

= description du magnétisme ; paramagnétisme

Les dipôles magnétiques ont une origine atomique-orbitale (couches électroniques incomplètes) ou électronique (spin électronique) ou nucléaire (spin nucléaire) ; à l'état d'équilibre, sans champ appliqué, le moment magnétique par unité de volume est nul : l'agitation thermique les oriente dans toutes les directions avec une égale probabilité. En présence d'un champ appliqué extérieur une aimantation moyenne apparaît ; on a un « paramagnétique ».

Mais les dipôles élémentaires ont des interactions magnétiques entre eux ; on appelle cela des termes « d'échange » (voir cours de mécanique quantique de deuxième année) ; cette interaction tend à les aligner antiparallèlement (on a un antiferromagnétique : Mn, FeO ...) ou parallèlement (on a un ferromagnétique : Fe, Co, ...). La zoologie de toutes les organisations possibles de spin est compliquée et hors de sujet ici.

Nous admettons pour la suite qu'il existe des moments permanents $\mathbf{m}_0(\mathbf{r})$ au point \mathbf{r} et que leur densité est $n(\mathbf{r})$ par unité de volume.

Si \mathbf{B} est le champ magnétique local dans un échantillon, l'énergie d'un moment \mathbf{m}_0 est :

$$U = - \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{B}$$

Le même raisonnement que pour les dipôles électriques montre que l'aimantation par unité de volume sera :

$$\mathbf{M} = n \mathbf{m}_0 L(\xi)$$

$$\text{avec } \xi = \frac{m_0 B}{kT}$$

Les comportements asymptotiques de cette fonction de Langevin $L(\xi)$ sont connus. Les mêmes raisonnements que dans le cas des diélectriques sont applicables pour ce qui est de la susceptibilité et du champ local.

= équations de Maxwell dans un corps magnétique.

On considère un volume (V) limité par une surface (S) ; en tout point de l'espace on sait exprimer le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ créé par les courants « vrais » et par la densité de dipôles (voir chapitre I du cours) :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}')$$

On cherche à transformer la dernière intégrale afin de la mettre sous une forme plus aisée à interpréter . Or :

$$\begin{aligned} \text{rot}_{\mathbf{r}'} \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{rot}_{\mathbf{r}'}[\mathbf{M}(\mathbf{r}')] - \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{rot}_{\mathbf{r}'}[\mathbf{M}(\mathbf{r}')] - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned}$$

Comme étape intermédiaire évaluons alors l'intégrale :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \mathbf{a} \cdot \text{rot}_{\mathbf{r}'} \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dv(\mathbf{r}') \quad \text{où } \mathbf{a} \text{ est un vecteur fixe quelconque ;}$$

sachant que $\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \text{rot}(\mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot \text{rot}(\mathbf{b})$

si on identifie $\mathbf{b}(\mathbf{r}') = \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ et puisque $\text{rot}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ l'intégrale donne

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \text{div} \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{a} \right) dv(\mathbf{r}') &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(S)} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{s}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(S)} \frac{d\mathbf{s}(\mathbf{r}') \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{a} \end{aligned}$$

En assemblant ces différents termes on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(S)} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') \\ &\quad + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{rot}_{\mathbf{r}'}[\mathbf{M}(\mathbf{r}')] dv(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

Formule connue (voir définition du potentiel vecteur au premier chapitre page 21) que l'on peut interpréter de la manière suivante : **le premier terme donne le potentiel et le champ créé par les courants extérieurs ou réels ; les deux autres donnent un potentiel de polarisation : \mathbf{A}_{pol} ;**

il comprend lui même deux contributions : la première provient d'un courant équivalent de surface $\tilde{\mathbf{j}}_{Ms}$ et la deuxième d'un courant équivalent de volume $\tilde{\mathbf{j}}_M$ avec les définitions :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{j}}_{Ms}(\mathbf{r}') &= \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}(\mathbf{r}') \\ \tilde{\mathbf{j}}_M(\mathbf{r}') &= \text{rot}_{\mathbf{r}'}[\mathbf{M}(\mathbf{r}')] \end{aligned}$$

- remarques

: en accord avec la définition, $\tilde{\mathbf{j}}_{Ms}$ est bien parallèle à la surface ;

: comme dans le cas des diélectriques on définit un champ microscopique \mathbf{b} , un champ local \mathbf{B}_{loc} , un champ moyen $\langle \mathbf{b} \rangle$ et un champ macroscopique ou de Maxwell \mathbf{B} qui apparaît dans les équations des ondes électromagnétiques et en optique .

- excitation magnétique \mathbf{H} et équations de Maxwell

L'application du théorème d'Ampère sous sa forme locale au vecteur champ magnétique oblige à écrire :

$$\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 (\mathbf{j} + \tilde{\mathbf{j}}_M) = \mu_0 [\mathbf{j} + \text{rot}(\mathbf{M})]$$

ou encore, en faisant passer une partie du deuxième membre à gauche : $\text{rot}(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}) = \mathbf{j}$

Cette équation suggère de définir un nouveau champ \mathbf{H} : « l'excitation magnétique » ;

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

avec la propriété :

$$\text{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \int_{(C)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(S)} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$$

ce qui est le théorème d'Ampère appliqué au champ \mathbf{H}

- conséquences

: on peut se souvenir des analogies suivantes entre diélectriques et corps magnétiques

$$\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{B} \quad , \quad \epsilon \Rightarrow \frac{1}{\mu} \quad , \quad \mathbf{P} \Rightarrow -\mathbf{M} \quad , \quad \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{H}$$

: les discontinuités de \mathbf{H} à la traversée de deux milieux magnétiques sont reliées aux courants de surface

$$\mathbf{H}_{T1} - \mathbf{H}_{T2} = \tilde{\mathbf{j}}_{Ms} \times \mathbf{n}_{1,2}$$

: les équations de Maxwell complètes sont donc l'un des deux ensembles d'équations ci dessous

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{D}) &= \rho \\ \operatorname{div}(\mathbf{B}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\mathbf{E}) &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}(\mathbf{H}) &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{E}) &= \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \tilde{\rho}) \\ \operatorname{div}(\mathbf{B}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\mathbf{E}) &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}(\mathbf{B}) &= \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{j}} + \tilde{\mathbf{j}}_M \right) \end{aligned}$$

L'un ou l'autre de ces groupes d'expressions peut servir pour un corps qui a à la fois des charges libres, une polarisation diélectrique, une aimantation magnétique.

Energie libre magnétique d'un corps aimanté

Le problème de l'énergie libre d'un corps aimanté est semblable à celui que l'on s'est posé dans un diélectrique ; on ne considère que des corps sans aimantation permanente : les paramagnétiques.

Dans un volume V_0 on considère un domaine V dans lequel il n'y a que des courants volumiques dits « extérieurs », et un domaine V' rempli par un corps polarisable magnétiquement sous l'effet des courants ; on va imaginer un processus par lequel dans cette disposition fixe on va faire croître le courant et donc le potentiel vecteur de 0 à sa valeur finale. On se demande d'abord quel est le potentiel vecteur en un point \mathbf{M} quelconque de V_0 ; par application des formules connues :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}') + \int_{V'} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\tilde{\mathbf{j}}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}') + \int_{S'} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\tilde{\mathbf{j}}_{Ms}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}')$$

Supposons qu'à partir d'un état caractérisé par $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ on accroisse ce courant de $\delta\mathbf{j}(\mathbf{r}')$; le potentiel va varier de $\delta\mathbf{A}(\mathbf{r})$; le travail électrique des piles, qui est aussi la variation d'énergie libre magnétique totale (voir premier chapitre page 29, est donc de :

$$\begin{aligned} \delta F = \delta U_{\text{totale mag}} = \delta W &= \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \delta\mathbf{A}(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') = \int_{V_0} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \delta\mathbf{A}(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\ &= \int_{V_0} \mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{r}')) \cdot \delta\mathbf{A}(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

puisque le courant est nul à l'extérieur de V ; en utilisant une relation fameuse, cette dernière intégrale donne :

$$\delta F = \delta W = \int_{V_0} \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{rot}(\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}')) dv(\mathbf{r}') + \int_{V_0} \text{div}[(\mathbf{H}(\mathbf{r}') \times \delta\mathbf{A}(\mathbf{r}'))] dv(\mathbf{r}')$$

le deuxième terme est évidemment nul si l'on repousse la surface de V_0 à l'infini ou si le potentiel vecteur est nul sur la surface de V_0 ; comme :

$$\mathbf{rot}(\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}')) = \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}')$$

$$\delta F = \delta W = \int_{V_0} \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}')$$

cette formule est très analogue à celle d'un diélectrique ;

= **susceptibilité magnétique**

- On définit, comme pour un diélectrique, une « susceptibilité magnétique » statique par la relation

$$\mathbf{M} = \mu_0 \chi_M \mathbf{H}$$

et une « perméabilité relative » μ_r du milieu :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \mathbf{B} \\ \mu_r &= 1 + \chi_M \end{aligned}$$

la densité d'énergie magnétique par unité de volume , pour un milieu isotrope et linéaire est :

$$f = \frac{B^2}{2 \mu_0 \mu_r}$$

Cette perméabilité est généralisée à des dépendances temporelles de l'aimantation d'une manière absolument parallèle à ce que l'on a fait pour la constante diélectrique . On définit : $\mu_r(\omega)$