

CHAPITRE VII

Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux matériels Interfaces et anisotropie

introduction

Dans ce chapitre on voudrait traiter de la propagation des ondes électromagnétiques dans divers milieux (diélectriques , métaux , plasmas) et principalement des ondes optiques . Suivant les cas on aura : soit un milieu infini , sans bord , et l'on cherchera les « modes propres » de propagation , que ces milieux soient parfaits ou conducteurs ; soit une surface de séparation entre deux diélectriques ou avec le vide , et l'on établira les règles de la réfraction optique ou de leur pénétration ; soit un milieu anisotrope , comme le sont les cristaux , et l'on cherchera à comprendre les phénomènes de biréfringence . On examinera également le cas de la propagation des ondes optiques dans les milieux non linéaires en raison de l'importance technique que revêt ce problème .

propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique , linéaire , infini , homogène et isotrope (l.i.h.i)

= Il faut expliquer d'abord ce que recouvrent les quatre adjectifs l , i , h , i .

Un milieu est dit linéaire si la « réponse » est proportionnelle à la « perturbation » ; on connaît l'exemple du moment dipolaire induit \mathbf{p}_0 : il est proportionnel au champ appliqué \mathbf{E} (ou mieux au champ local) . Plus simple encore , pour un ressort harmonique , le déplacement de son extrémité est proportionnel à la force que l'on applique .

Un milieu ou un espace est infini s'il n'a pas de « bord » ; cette définition comprend le cas où il n'y a pas non plus de « source » ; dans ce cas , les conditions aux limites ne conditionnent pas les solutions propagatives que l'on cherche ; on obtient les modes propres orthogonaux de vibration du milieu ; on peut classer les solutions par symétrie (ondes planes , ondes sphériques , ...) .

Un milieu est homogène si à une certaine échelle ses propriétés sont identiques d'un point à un autre . Quelle échelle ? il est clair qu'au niveau atomique aucun milieu n'est homogène (atomes , électrons , ..sont des points singuliers) ; toutefois à l'échelle de dix mailles , ou de cent ...on peut moyenniser les densités de charges électriques , de moments dipolaires ...et chaque volume élémentaire $dv(\mathbf{r})$ est identique dans toute l'étendue du milieu . C'est ce que l'on admet a-priori pour traiter de la propagation d'une onde électromagnétique dans un diélectrique ; c'est l'hypothèse couramment faite dans le domaine de la thermodynamique , de l'hydrodynamique et des phénomènes de transport ; c'est aussi le point de vue qui a justifié l'introduction des grandeurs \mathbf{D} et \mathbf{H} dans les équations de Maxwell des milieux polarisables .

Un milieu anisotrope est tel que les « grandeurs de matière » qui donnent les propriétés du milieu sont en réalité des grandeurs « tensorielles » : conductivité $\mathbf{J} = \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E}$, susceptibilité diélectrique $\mathbf{D} = \underline{\underline{\epsilon}}(\omega) \mathbf{E}$; une conséquence immédiate en est que la propagation d'une onde optique ne se fait pas avec la même vitesse dans les différentes directions

Pour traiter de la propagation d'une onde dans un milieu « l.i.h.i » il faut revenir aux équations de Maxwell valables pour un diélectrique (jusqu'à preuve du contraire on acceptera que ce milieu n'a pas de polarisation magnétique) ; on garde des équations homogènes et les sources extérieures sont ignorées ; on calculera donc les modes propres avec un groupe d'équations homogènes sans second membre .

Une analyse de Fourier des équations de départ (Maxwell) conduit à :

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \tilde{\epsilon}_r(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\text{div}[\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega)] = 0$$

$$\text{div}[\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega)] = \text{div}[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)] = 0$$

$$\text{rot}[\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega)] = \mu_0 \epsilon_0 (i\omega) \tilde{\epsilon}_r(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\text{rot}[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)] = -(i\omega) \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega)$$

ou encore , après une analyse en ondes planes :

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{q}, \omega) = \tilde{\epsilon}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}, \omega)$$

$$\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

$$\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

$$-i\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 (i\omega) \tilde{\epsilon}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

$$-i\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = -(i\omega) \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega)$$

La première de ces cinq équations s'appelle une « équation de matière ». Ces équations fournissent en général une relation entre diverses grandeurs mesurables ; la constante diélectrique, par exemple, dépend du matériau étudié et donne une relation de proportionnalité entre \mathbf{D} et \mathbf{E} .

Les quatre dernières équations, qui ne sont que les équations de Maxwell, sont remarquables car elles sont identiques à ce que nous avons rencontré dans le vide, à la seule différence que, dans l'avant dernière, le produit $\mu_0 \epsilon_0$ est remplacé par $\mu_0 \epsilon_0 \tilde{\epsilon}_r(\omega) = \mu_0 \tilde{\epsilon}(\omega)$ pour une onde de pulsation ω .

= milieu diélectrique parfait

Par définition, dans un milieu parfait (c'est à dire sans perte) $\tilde{\epsilon}_r(\omega)$ est réel. La solution du problème est donc en principe connue ; comme dans le cas du vide, si on cherche des solutions de type onde plane, leur vitesse de phase au lieu d'être c , celle de la lumière, est :

$$v_\phi(\omega) = \omega/q = \frac{c}{[\tilde{\epsilon}_r(\omega)]^{1/2}} = \frac{c}{n(\omega)}$$

: la vitesse de phase est plus petite que celle de la lumière ;

: $n(\omega)$ s'appelle l'indice optique du milieu diélectrique à la fréquence de l'onde ; il est toujours supérieur à l'unité ; c'est une grandeur spécifique pour chaque milieu, que l'on mesure avec quatre, cinq ou six décimales (si la température est fixe) et qui sert souvent à qualifier la pureté de l'échantillon.

: les trois vecteurs \mathbf{q} , \mathbf{D} et \mathbf{B} forment un trièdre direct ainsi que \mathbf{q} , \mathbf{E} et \mathbf{B} .

: il y a toutefois une autre différence avec le cas du vide : le milieu est « dispersif » car la vitesse de phase dépend en général de la fréquence.

= milieu diélectrique non parfait

La loi de dispersion des ondes s'écrit toujours :

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\epsilon}_r(\omega)$$

mais le vecteur d'onde, quantité que l'on cherche à exprimer lorsque la fréquence est fixée, comporte une partie réelle et une partie imaginaire :

$$q = q' - iq''$$

$$q' = \frac{\omega}{c} (\epsilon')^{1/2}$$

$$q'' = \frac{1}{2} q' \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$$

de sorte que , en reportant dans la solution en onde plane , on trouve aisément que :

$$: \exp i(\omega t - qx) = \exp i(\omega t - q' x) \exp(-q'' x) ;$$

: le deuxième facteur se traduit par une atténuation de l'onde car q'' est positif si $\chi''(\omega)$ est positif .

: dans certaines circonstances $\chi''(\omega)$ peut être négatif : le milieu est amplificateur ;

: pour $\chi''(\omega)=0$ le milieu est transparent

: **B** est en retard sur **E** d'un angle ψ tel que $\text{tg}(\psi) = q''/q'$

A ce stade , le résultat est formel ; toute la physique consiste en effet à calculer q'' avec un modèle physique réaliste .

= propagation de l'énergie dans la matière

On a calculé , en régime statique , la variation d'énergie libre d'un milieu diélectrique et magnétique

$$\delta F = \int_V [\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}] dv$$

Cette formule est remarquable car les parties diélectriques et magnétiques sont séparées au moins dans les équations de Maxwell de la statique . En régime dépendant du temps , il n'en est plus de même .

- premier postulat

En régime variable on va utiliser la même formule et accepter que l'intégrale soit calculée sur un petit volume (v) comme si cette énergie était localisée ; on part donc de :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int_v [\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}] dv = \int_v \{ \mathbf{H} \cdot [- \text{rot}(\mathbf{E})] + \mathbf{E} \cdot [\text{rot}(\mathbf{H}) - \mathbf{j}] \} dv$$

et l'on cherche à faire un bilan .

- deuxième postulat

Si cette énergie change dans le temps c'est pour deux raisons ; si il y a dans le milieu des courants réels qui circulent il y aura dissipation d'énergie par effet Joule ; par unité de temps cela donne la contribution :

$$- \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, dv$$

Par ailleurs , le flux \mathbf{R} d'énergie qui traverse le volume V n'a en général aucune raison d'être uniforme ; il donnera une contribution $-\text{div}(\mathbf{R})$ à la variation d'énergie par unité de temps dans le volume V ; soit au total :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - \int_V [\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \text{div}(\mathbf{R})] \, dv$$

En reportant dans cette équation de bilan l'expression de $\frac{\partial F}{\partial t}$ cela permet de donner une expression pour le vecteur \mathbf{R} :

$$\int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, dv + \frac{\partial F}{\partial t} = - \int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \, dv = - \int_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$$

Soit en fin de compte :

$$\mathbf{R} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

- remarques

: ce vecteur s'appelle « vecteur de Poynting »

: on retrouve bien le résultat valable dans le vide , puisque dans ce cas

$$\mathbf{R} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}$$

[Dans le vide et pour une onde plane on avait noté dans le chapitre II que si

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - qx) \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{q}}{q} \times \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - qx)$$

la densité d'énergie est alors

$$f = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \epsilon_0 E^2$$

et la valeur moyenne dans le temps de cette quantité est

$$\langle f \rangle = \langle \epsilon_0 E^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad]$$

De la même manière en calculant $\langle \mathbf{R} \rangle$ on trouve ici :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad \rightarrow \quad \langle \mathbf{R} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle = \frac{\mathbf{q}}{q} \langle f \rangle = v \frac{\mathbf{q}}{q}$$

Ainsi le vecteur de Poynting est parallèle au vecteur d'onde , et la densité moyenne d'énergie se propage avec la vitesse de phase $v=c/n$ de l'onde

: cas d'un milieu diélectrique absorbant et non dispersif

L'équation de dispersion conduit comme on l'a vu à :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-q'' x) \cos(\omega t - q' x)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{v} \frac{\mathbf{q}'}{q} \times \mathbf{E}_0 \exp(-q'' x) \cos(\omega t - q' x - \psi)$$

$$\langle \mathbf{R} \rangle = \left(\frac{1}{2} \epsilon E_0^2 \right) \cos(\psi) \exp(-2q'' x) \left(v \frac{\mathbf{q}'}{q} \right)$$

la propagation de l'énergie se fait à la vitesse de phase , mais il y a absorption ; le calcul suppose que ψ est petit .

Dans ce cas comme le précédent , le rayon lumineux qui correspond à la propagation de l'énergie , est parallèle à \mathbf{R} , lui même parallèle à \mathbf{q} ; les rayons lumineux sont donc des droites perpendiculaires aux plans d'onde

- cas d'un milieu non absorbant mais dispersif

Comme on le sait par les relations de KK , il y a contradiction à parler d'un milieu dispersif et non absorbant ; ce qui justifie l'emploi de cette caractéristique , c'est que rien n'impose que l'absorption soit notable dans une gamme de fréquence ; mais KK impose alors que dans une autre gamme la partie imaginaire de ϵ soit non nulle .

En général un diélectrique est dispersif , surtout dans le domaine des fréquences optiques : ϵ' est une fonction de la fréquence : $\epsilon'(\omega)$. Par ailleurs , une onde optique est plus ou moins monochromatique : soit elle a une largeur naturelle en fréquence car les niveaux quantiques des atomes ne sont pas infiniment étroits , soit il a fallu déclencher un train d'ondes limité dans le temps , ...L'analyse de Fourier de l'onde conduit inévitablement à une largeur en fréquence ; tant que le milieu est sans dispersion , toutes les composantes d'ondes se propagent avec la même vitesse et la forme temporelle du train d'onde ne subit pas de déformation (cas du vide où , conformément à KK l'absorption est nulle à toute fréquence) . Il n'en est plus de même en général et les questions que l'on se pose sont directement : comment se propage le paquet d'ondes , comment se propage l'énergie , quelle est la direction du faisceau lumineux , comment une impulsion qui a un certain profil dans le temps se déforme au cours de sa propagation .

Traisons d'abord le problème de la propagation du paquet d'ondes ; la vitesse correspondante sera la vitesse de groupe .

Pour simuler un paquet d'ondes on va écrire qu'une onde monochromatique de fréquence centrale ω a une amplitude modulée dans le temps par une courbe enveloppe $f(t)$ réelle :

$$E(t) = E_0 f(t) \cos[\omega(q)t - qz]$$

La transformée de fourier de $f(t)$ est :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int f(\Omega) \exp(-i\Omega t) d\Omega \quad f(\Omega) = \int f(t) \exp(i\Omega t) dt \quad f^*(\Omega) = f(-\Omega)$$

Si vraiment $f(t)$ est une enveloppe $f(\Omega)$ n'a de valeur notable que pour $\Omega \ll \omega$.

$$E(t, z = 0) = E_0 f(t) \cos[\omega(q)t]$$

L'analyse de Fourier de cette expression fait apparaître des fréquences différentes, des modes, qui vont se propager chacun avec un vecteur d'onde qui dépend de cette fréquence; on est donc amené à écrire :

$$E(t, z) = \frac{1}{2} \frac{E_0}{2\pi} \int f(\Omega) \{ \exp[-i(\Omega + \omega)t + iq(\Omega + \omega)z] + \exp[-i(\Omega - \omega)t - iq(\omega - \Omega)z] \} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E_0}{2\pi} \{ \int f(\Omega) \exp[-i(\Omega + \omega)t + iq(\omega + \Omega)z] d\Omega + cc \}$$

Le concept de vitesse de groupe ne s'applique vraiment qu'au cas où l'onde électromagnétique (propagation du champ électrique) a des composantes dans un domaine étroit en fréquence : $\Omega \ll \omega$. On va donc faire un développement limité de la loi de dispersion autour de la valeur ω :

$$q(\omega + \Omega) = q(\omega) + \Omega \frac{\partial q(\omega)}{\partial \omega} \quad \text{et donc :}$$

$$[-(\Omega + \omega)t + q(\omega + \Omega)z] = [-\omega t + q(\omega)z] + [-\Omega t + \Omega \frac{\partial q(\omega)}{\partial \omega} z]$$

$$= [-\omega t + q(\omega)z] + \Omega [-t + \frac{\partial q(\omega)}{\partial \omega} z]$$

Le paquet d'onde peut encore être écrit sous la forme :

$$\frac{1}{2} \frac{E_0}{2\pi} \{ \exp[-i\omega t + iq(\omega)z] \int f(\Omega) \exp\{i\Omega [-t + \frac{\partial q(\omega)}{\partial \omega} z]\} d\Omega + cc \}$$

Il est clair que pour que l'amplitude du paquet d'ondes soit maximale le terme dans l'intégrale doit être constant; on a alors une moyenne sur $f(\Omega)$; si t et z sont liés par la relation :

$$[-t + \frac{\partial q(\omega)}{\partial \omega} z] = 0 \quad \text{on remplit cette condition}$$

Ce faisant on a défini la vitesse de groupe :

$$v_{gr} = \frac{\partial \omega(q)}{\partial q}$$

Examinons maintenant le problème de la propagation de l'énergie en gardant la définition utilisée dans le cas du vide : cette vitesse est mesurée par le rapport entre le vecteur de Poynting moyenné dans le temps et la densité d'énergie moyenne.

On part avec le même paquet d'ondes, et l'on examine la situation en $z=0$:

$$E(t) = E_0 f(t) \cos \omega t$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int f(\Omega) \exp(-i\Omega t) d\Omega \quad f(\Omega) = \int f(t) \exp(i\Omega t) dt \quad f^*(\Omega) = f(-\Omega)$$

Si vraiment $f(t)$ est une enveloppe $f(\Omega)$ n'a de valeur notable que pour $\Omega \ll \omega$.

Par ailleurs la relation entre $D(t)$ et $E(t)$ est une convolution (justement pour introduire un diélectrique avec dispersion) :

$$D(t) = \epsilon_0 E(t) + \epsilon_0 \int_0^{\infty} \chi(\tau) E(t - \tau) d\tau$$

Dans la suite on appellera $\hat{\epsilon}$ un opérateur qui permet de passer de $E(t)$ à $D(t)$ et plus généralement d'une fonction de t à une autre par la même opération que de $E(t)$ à $D(t)$:

$$D(t) = \hat{\epsilon}[E(t)] \quad \frac{\partial D(t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{\epsilon} \right) [E(t)]$$

Avec ces définitions on a évidemment :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{\epsilon} \right) \exp(i\omega t) = i\omega \epsilon_0 [1 + \chi(\omega)] \exp(i\omega t) = i\omega \epsilon(\omega) \exp(i\omega t)$$

Revenons maintenant au champ électrique :

$$E(t) = E_0 f(t) \cos \omega t = E(t) = \frac{1}{2} \frac{E_0}{2\pi} \int f(\Omega) \{ \exp[-i(\Omega + \omega)t] + \exp[-i(\Omega - \omega)t] \} d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E_0}{2\pi} \{ \int f(\Omega) \exp[-i(\Omega + \omega)t] d\Omega + cc \}$$

Reste à exprimer $D(t)$ afin de pouvoir ensuite calculer la densité d'énergie ; en appliquant les opérateurs définis plus haut on a :

$$\frac{\partial D(t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{E_0}{2\pi} \{ -i \int f(\Omega) (\Omega + \omega) \epsilon(\Omega + \omega) \exp[-i(\Omega + \omega)t] d\Omega + cc \}$$

on développe cette formule au voisinage de $\omega \gg \Omega$:

$$(\Omega + \omega) \epsilon(\Omega + \omega) = \omega \epsilon(\omega) + \Omega \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\omega)] \quad \text{--->}$$

$$\frac{\partial D(t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{E_0}{2\pi} \{ -i\omega \epsilon(\omega) \exp(-i\omega t) \int f(\Omega) \exp(-i\Omega t) d\Omega + cc$$

$$-i \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\omega)] \exp(-i\omega t) \int f(\Omega) \Omega \exp(-i\Omega t) d\Omega + cc \}$$

En effectuant les opérations intégrales on a :

$$\frac{\partial D(t)}{\partial t} = \frac{E_0}{2} \left\{ -i\omega \epsilon(\omega) \exp(-i\omega t) f(t) + c.c. + \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\omega)] \exp(-i\omega t) \frac{\partial f(t)}{\partial t} + c.c. \right\}$$

Au total quatre termes .

Il importe maintenant de calculer l'évolution de la densité moyenne d'énergie électrique en ne gardant que les termes significatifs , ceux qui ne fluctuent pas vite , quand on fait le produit et la moyenne temporelle avec $E(t)$; beaucoup de termes s'annulent ceux justement qui laissent subsister des exposants en ωt ; et il ne reste que :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f_{el}}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle E(t) \frac{\partial D(t)}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{E_0^2}{4} 2 \frac{\partial [\omega \epsilon(\omega)]}{\partial \omega} \left\langle f(t) \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right\rangle \end{aligned}$$

La densité moyenne d'énergie magnétique , qui ne fait pas apparaître la quantité $D(t)$ mais seulement $E(t)$ et sa dérivée pour exprimer $H(t)$ s'exprime par :

$$\left\langle \frac{\partial f_{mag}}{\partial t} \right\rangle = \frac{E_0^2}{4} 2 \epsilon(\omega) \left\langle f(t) \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right\rangle$$

D'où la densité moyenne d'énergie totale en assemblant les deux contributions :

$$\left\langle f_{totale} \right\rangle = \frac{E_0^2}{2} \left[\epsilon(\omega) + \frac{\omega}{2} \frac{\partial \epsilon(\omega)}{\partial \omega} \right] \left\langle f^2(t) \right\rangle$$

On peut tirer de cette formule une première conclusion : **il n'y a plus équipartition entre partie électrique et magnétique .**

Le calcul du vecteur de Poynting ne fait lui non plus pas apparaître la grandeur $D(t)$ et donc

$$\left\langle R \right\rangle = \frac{E_0^2}{2} \epsilon(\omega) \left\langle f^2(t) \right\rangle v(\omega)$$

où $v(\omega)$ est la vitesse de phase de l'onde soit $v(\omega) = \frac{c}{[\epsilon(\omega)]^{1/2}}$

Nous avons donc toutes les pièces du puzzle qui permettent d'exprimer la vitesse d'énergie qui sera définie , comme dans le vide , par :

$$v_{energie} = \frac{\left\langle R \right\rangle}{\left\langle f_{totale} \right\rangle} = c \frac{[\epsilon(\omega)]^{1/2}}{\left[\epsilon(\omega) + \frac{\omega}{2} \frac{\partial \epsilon(\omega)}{\partial \omega} \right]} = c \frac{1}{n(\omega) + \omega \frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega}} = \frac{c}{\frac{\partial [\omega n(\omega)]}{\partial \omega}}$$

Or cette valeur est précisément la vitesse de groupe ! puisque :

$$dk = \frac{1}{c} d[\omega n(\omega)] = d\omega \left[n(\omega) + \omega \frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega} \right] \quad 1/c$$

On en tire le résultat nouveau :

$$v_{\text{groupe}} = \nabla_{\mathbf{k}}(\omega) = v_{\text{energie}}$$

A l'évidence ce résultat n'est vrai que tant que la constante diélectrique reste réelle dans la gamme de fréquence où l'on travaille .

Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ; effet de peau

En électromagnétisme on a appris comment un conducteur parfait (conductibilité infinie) imposait certaines conditions de surface aux champs ou aux potentiels électriques ; dans la réalité , le conducteur a une conductivité finie ; l'équilibre des charges ne s'établit pas instantanément ; et même , lorsqu'une onde se réfléchit sur une surface métallique , une certaine épaisseur est nécessaire pour assurer cet réflexion . Il faut donc passer par un modèle plus réaliste dès que l'on aborde des problèmes de physique ; le plus simple d'entre eux est celui qui considère les électrons libres comme un gaz qui relaxe vers une situation d'équilibre ayant une densité moyenne constante et uniforme ; c'est celui que l'on développe ci dessous .

= modèle statique relatif à la conductivité

Dans un métal il y a une densité $\rho = ne$ de charges par unité de volume ; sous l'influence d'un champ électrique \mathbf{E} leur équation du mouvement est :

$$m \frac{dv}{dt} = eE - \eta v$$

η est une viscosité : une force de frottement ralentit le mouvement des charges ; si le champ appliqué est statique , quand le régime permanent est atteint , après un temps long devant le temps de relaxation , les électrons ont acquis une vitesse limite :

$$\eta v = eE$$

on peut alors exprimer la densité de courant \mathbf{j} en fonction de \mathbf{E} ; le coefficient de proportionnalité entre \mathbf{j} et \mathbf{E} est la « conductivité statique » σ .

$$\sigma = \rho e / \eta$$

Par une analyse de la dimensionalité de σ et η on préfère écrire : $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$

où τ est un temps de relaxation ; $\eta = \frac{m}{\tau}$.

Dans un métal τ est très court : 10^{-14} s ; c'est en fait un temps de collision avec les impuretés du métal ou avec ses excitations thermiques (phonons) .

= modèle dynamique

En régime forcé par un champ oscillant on obtient la conductivité à une fréquence donnée

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{m}{\tau} v = eE \quad \Rightarrow \quad m i\omega \tilde{v}(\omega) + \frac{m}{\tau} \tilde{v}(\omega) = e\tilde{E}(\omega)$$

la conductibilité à la même fréquence est donc : $\tilde{\sigma}(\omega) = \sigma \frac{1}{1 + i\omega\tau}$

= les équations de propagation d'une onde électromagnétique plane de fréquence ω dans le conducteur sont :

$$\text{div}(\tilde{\mathbf{B}}) = 0$$

$$\text{div}(\tilde{\mathbf{D}}) = \tilde{\rho}$$

$$\text{rot}(\tilde{\mathbf{E}}) = -i\omega\mu_0 \tilde{\mathbf{H}}$$

$$\text{rot}(\tilde{\mathbf{H}}) = \tilde{\sigma}\tilde{\mathbf{E}} + i\omega\epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}$$

On supposera que ce conducteur n'est ni magnétique , ni diélectrique : il n'y a que la conductivité pour le différentiel du vide . On note \mathbf{q} le vecteur d'onde . **Le problème consiste à trouver la loi de dispersion des ondes en reliant \mathbf{q} aux grandeurs physiques ; elles sont souvent appelées « grandeurs de matière » , là aussi , pour signifier qu'elles dépendent du métal .**

En éliminant \mathbf{E} dans ces équations homogènes on a :

$$-\Delta(\tilde{\mathbf{H}}) = (\tilde{\sigma} + i\omega\epsilon_0) (-i\omega\mu_0)\tilde{\mathbf{H}}$$

la loi de dispersion des ondes est donc :

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{i\tilde{\sigma}}{\epsilon_0\omega} \right)$$

q est donc un vecteur complexe : $q = q' - iq''$

= discussion physique

Toute la discussion porte sur les valeurs respectives des trois quantités : ω , τ , ω_{pl} (fréquence de plasma définie par $\omega_{pl}^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}$) ; dans un métal , pour des concentrations d'électrons de

l'ordre de $10^{23}/\text{cm}^3$: $\omega_{pl} \cong 10^{16}$ et $\tau \cong 10^{-12}$; c'est donc avec ces valeurs en tête qu'il faut discuter l'équation de dispersion précédente que l'on réécrit sous la forme :

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2} \frac{\omega\tau}{1 + i\omega\tau} \right).$$

- cas basse fréquence : $\omega\tau \ll 1$ ou/et $\omega \rightarrow 0$

$$q^2 \cong -i\omega_{pl}^2 \frac{\omega\tau}{c^2} = -i \frac{\sigma\omega}{\epsilon_0 c^2} \quad \rightarrow \quad q \cong \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma\omega}{\epsilon_0 c^2}}$$

on calcule ainsi une épaisseur de peau δ qui exprime sur quelle longueur une onde électromagnétique est atténuée dans le métal ; il n'y a pas propagation au delà de cette longueur :

$$\delta \cong \sqrt{\frac{1}{2\sigma\omega\mu_0}}$$

Avec les valeurs précédentes , pour des ondes de 100 Mc/s : $\delta = 1$ micron ; c'est un bon métal !
C'est ce qui explique la possibilité de faire des « blindages » pour les ondes radio ; plus la fréquence est basse , plus il est difficile de blinder , car cela oblige à avoir des épaisseurs de métal plus grandes .

- cas très haute fréquence : $\omega > \omega_{pl}$

dans la plupart des cas on a $\omega_{pl}\tau > 1$; on a donc une propagation d'onde électromagnétique comme si elle était dans le vide , avec la vitesse c et une faible atténuation ; on ne rencontre pas ce régime en optique car il correspondrait à des fréquences trop hautes , au moins dans un métal

- cas intermédiaire : $\omega\tau > 1$, $\omega < \omega_{pl}$

la conductivité devient imaginaire pure ; mais la constante diélectrique est négative ! ; il n'y a aucune propagation : q est purement imaginaire .

Les fondations de l'optique géométrique ; milieux l.i.i.

On appelle « optique géométrique » cette branche de l'optique qui considère la longueur d'onde comme très petite devant toutes les autres dimensions qui entrent dans le problème (dimensions du milieu , interfaces , ...) ; par référence aux chapitres précédents c'est donc une branche de l'optique qui néglige tous les phénomènes de diffraction . Les lois de l'optique vont alors pouvoir être formulées en termes de géométrie ou de mécanique (principe de Fermat) . Les mêmes principes s'appliqueront à la propagation des ondes acoustiques dans le milieu marin ou aux ondes radio dans le milieu extraterrestre .

Nous traiterons de ces problèmes pour un milieu isotrope mais inhomogène , et tel que $\mathbf{j}=0$ et $\rho=0$; quant à l'approximation de longueur d'onde très petite elle est équivalente à dire que le milieu est « homogène localement » : il n'a pas de propriétés qui varient notablement à l'échelle de la longueur d'onde ; quantitativement on écrit cette condition :

$$|\nabla n(\omega, \mathbf{r})| \ll \frac{n(\omega, \mathbf{r})}{\lambda} \quad (\text{hypothèse pour établir l'« eikonale »})$$

A partir des équations de Maxwell et sous réserve que l'on puisse définir un indice optique « local » on montre aisément que l'onde devrait obéir à l'équation de propagation :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\nabla \left[\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})} \right]$$

Que faire avec une équation si compliquée sinon trouver des approximations ?

= l'équation « eikonale » (nom d'origine grecque qui signifie « image »)

- soit $f(\mathbf{r}, t)$ une grandeur propagative dans un milieu homogène infini ; elle obéit à l'équation différentielle :

$$\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

une solution en forme d'onde plane , avec $v = \text{constante}$, est :

$$f(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ a \exp [i (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \} = \text{Re} \{ a \exp [i \varphi(\mathbf{r}, t)] \}$$

- Dans un milieu inhomogène (où l'indice optique , par exemple , varie lentement dans l'espace) on écrira que l'amplitude « a » de l'onde varie avec (\mathbf{r}, t) et que la phase $\varphi(\mathbf{r}, t)$ n'a pas la forme simple qu'elle a dans un milieu homogène . Certes on peut toujours écrire $f(\mathbf{r}, t)$ sous cette nouvelle forme :

$$f(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ a(\mathbf{r}, t) \exp [i \varphi(\mathbf{r}, t)] \}$$

la question est plutôt de savoir si cela a un intérêt ; c'est tout le but de ce paragraphe que de montrer que cette écriture a un avantage , justement dans le cas des milieux à propriétés lentement variables dans l'espace .

Pourquoi cette forme spéciale ? parce que si l'on revient à l'équation de propagation donnée au début du paragraphe notre hypothèse simplificatrice sur le milieu lentement inhomogène est identique à chercher des solutions de :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{--->} \quad \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + q^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad q^2(\mathbf{r}) = \mu_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \omega^2$$

En introduisant dans cette équation la forme voulue pour $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = a(\mathbf{r}, \omega) \exp [i \varphi(\mathbf{r}, \omega)]$ on doit résoudre par approximations :

$$\Delta a + i a \Delta \varphi + 2i \nabla \varphi \cdot \nabla a - a (\nabla \varphi)^2 + q^2 a = 0$$

La première approximation consiste à négliger les variations spatiales de $a(\mathbf{r}, \omega)$ -->

$$i \Delta \phi - (\nabla \phi)^2 + q^2 = 0$$

; dans la littérature on écrit souvent : $\phi(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\omega}{c} S(\mathbf{r}, \omega) = q_0 S(\mathbf{r}, \omega)$

$\nabla \phi(\mathbf{r}, \omega)$ joue le rôle de vecteur d'onde local ; de sorte que :

$$(\nabla S)^2 - \frac{i}{q_0} \Delta S = \frac{q^2}{q_0^2} = n^2(\mathbf{r}, \omega) \quad ;$$

on simplifie encore cette équation dans le domaine optique en négligeant le terme en laplacien , ce qui est très licite; soit la forme finale de l'équation eïkonale :

$$(\nabla S)^2 = \frac{q^2}{q_0^2} = n^2(\mathbf{r}, \omega)$$

= Conséquences tirées de cette équation

- On appellera « front d'onde » une surface telle que : $S(\mathbf{r}, \omega) = \text{constante}$

- cela étant , quelle est la structure locale de l'onde ? ou , comment relier les orientations des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} au gradient de $n(\mathbf{r}, \omega)$? ($n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{q^2}{q_0^2}$)

Si l'on écrit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \exp\{i[-\omega t + \phi(\mathbf{r})]\}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \exp\{i[-\omega t + \phi(\mathbf{r})]\}$$

on doit satisfaire $\text{div}[\mathbf{B}(\mathbf{r})] = 0 = \text{div}[\mathbf{B}_0(\mathbf{r})] + i \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r})$

or le premier terme est négligeable devant le second .

$$\rightarrow \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (1)$$

Pour la même raison on aura :

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (2)$$

$$\text{En utilisant } \text{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) \quad \rightarrow \quad \nabla \phi(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_0 = -c \mathbf{B}_0 \quad (3)$$

$$\text{rot}(\mathbf{H}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad -c \nabla \phi(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_0 = n^2 \mathbf{E}_0 \quad (4)$$

On en conclut donc que l'onde a « localement » la structure d'une onde plane avec \mathbf{E} , \mathbf{B} $\nabla \phi(\mathbf{r})$ formant les trois vecteurs d'un trièdre direct , comme dans le vide .

- Le vecteur de Poynting qui détermine la trajectoire de l'énergie est donc parallèle au vecteur $\nabla\varphi(\mathbf{r})$

- Soient deux surfaces équiphasés Ψ_1 et Ψ_2 à un instant donné ;

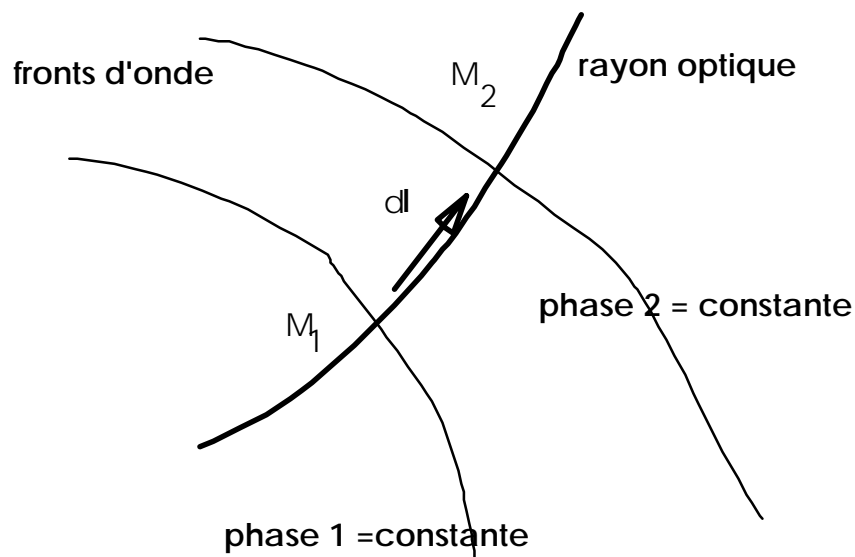
$$\Psi_1 = \Psi_0 - \omega t + \varphi_1(\mathbf{r}) \quad \Psi_2 = \Psi_0 - \omega t + \varphi_2(\mathbf{r})$$

le long de la trajectoire du rayon on aura :

$$[\varphi_2(\mathbf{r}) - \varphi_1(\mathbf{r})] = \int_{M_1}^{M_2} \nabla\varphi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}(\mathbf{r}) = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{q}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}(\mathbf{r}) = q_0 \int_{M_1}^{M_2} n(\mathbf{r}) dl(\mathbf{r})$$

On écrit dans la plupart des manuels :

$$\int_{M_1}^{M_2} n(\mathbf{r}) dl(\mathbf{r}) = S(M_1, M_2)$$



La quantité $S(M_1, M_2)$ s'appelle « le chemin optique » entre les deux points M_1 et M_2 ; cette quantité obéit à l'équation de l'éikonale .

Si l'indice optique du milieu varie d'un point à un autre (inhomogénéité) les rayons lumineux ont des trajectoires curvilignes ; les surfaces $S = \text{constante}$ sont les mêmes que les surfaces équiphasés , et les rayons lumineux leur sont perpendiculaires .

- si l'on désigne le vecteur unitaire \mathbf{s} par

$$\mathbf{s} = \frac{\nabla S}{n} \quad \text{et } \mathbf{r}(\mathbf{s}) \text{ un point quelconque d'un rayon : } d\mathbf{r} = \mathbf{s} ds \quad \text{et l'on a : } n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla S .$$

En différentiant cette équation on obtient la « forme vectorielle des trajectoires » :

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \right) \nabla S = \frac{1}{n} \sum_i \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla S = \frac{1}{n} \sum_i \frac{\partial S}{\partial x_i} \nabla \frac{\partial S}{\partial x_i} = \frac{1}{2n} \nabla \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 = \nabla n$$

soit :

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n$$

- Dans le cas particulier où $n = \text{constante}$, on a bien : $\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = 0 \rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{a} s + \mathbf{b}$, ce qui

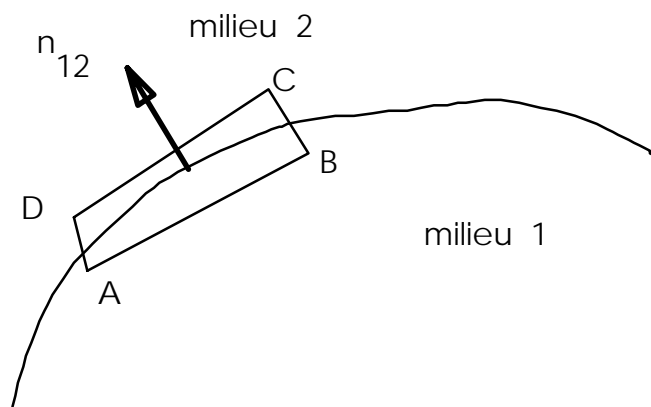
signifie que le rayon est rectiligne .

- Autre exemple : si $n = \text{constante}$ on peut choisir $L = nr$ et les surfaces d'onde sont des sphères !

- Autre exemple : déduction de la loi de la réfraction ; soit en effet un dioptre . Il résulte de l'équation eikonale que :

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = n \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{rot} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \mathbf{rot} (n \mathbf{s}) = 0 ; \text{ et en appliquant toujours le même théorème :}$$

$$\int_C n \mathbf{s} \cdot d\mathbf{l} = 0 \text{ Pour un contour } (C) = AB+BC+CD+DA$$



cette intégrale revient à écrire (comme pour la continuité de la composante tangente du champ électrique au premier chapitre) :

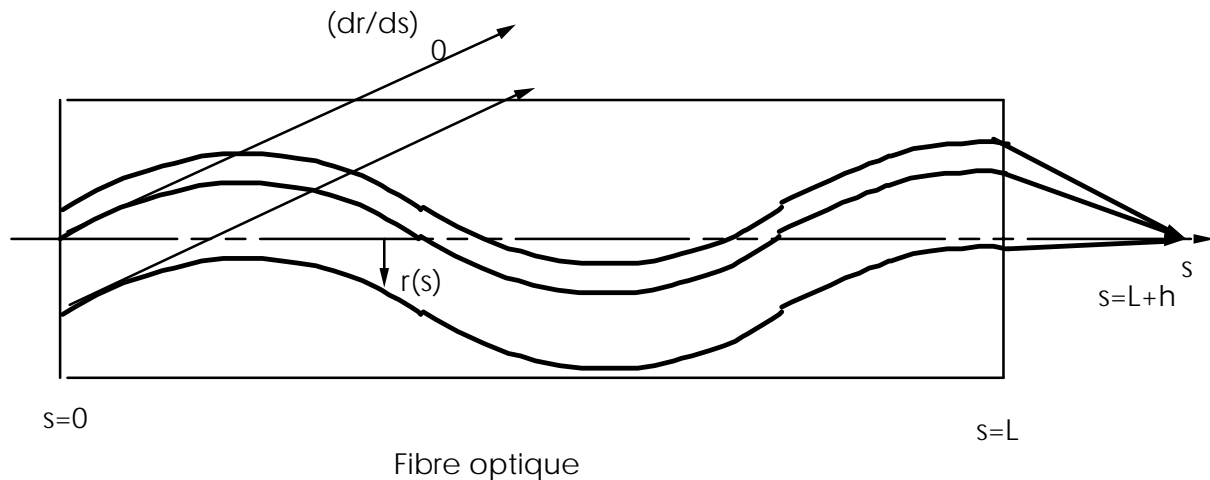
$$n_{12} \times (n_2 \mathbf{s}_2 - n_1 \mathbf{s}_1) = 0 \rightarrow n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

En d'autres termes la composante tangentielle du rayon vecteur $n \mathbf{s}$ est continue à travers la surface .

= application : les fibres optiques

Voilà question technique , d'importance décisive pour la communication , la transmission des imagesUne fibre optique est un long fil de verre , étiré d'un diamètre constant de l'ordre d'une fraction de millimètre , extrudé suivant des procédés dont la technicité est lourde et abondamment brevetée ; elle est préparée de manière à ce qu'un faisceau entrant à une extrémité

soit guidé le long de la fibre avec une atténuation minimum (qualité de verre , mêmes propriétés d'indice tout le long de la fibre , souplesse mécanique ...). Le « guider » cela veut dire qu'il n'ait pas la possibilité de sortir de la fibre , auquel cas l'information serait perdue , le signal diminué . Nous allons montrer que pour guider le faisceau il faut que l'indice optique décroisse du centre de la fibre vers la périphérie ; ainsi dans une fibre de section circulaire le faisceau aura à peu près l'allure suivante :



Avec un modèle simple , d'ailleurs réaliste , nous allons calculer la trajectoire d'un rayon lumineux qui entre par une face en un point quelconque avec un angle d'incidence petit et nous montrerons que tous les rayons sortant de l'autre face convergent vers un même point quel que soit leur point d'entrée .

Soit une fibre de symétrie cylindrique ; à une distance r de l'axe , l'indice optique est supposé égal à :

$$n(r) = n_0(1 - kr^2) \quad \text{on écrira : } (2k)^{-1/2} = Z ;$$

Z est une distance caractéristique .

Pour des rayons peu inclinés sur l'axe les variations de s (l'abscisse curviligne du rayon) seront voisines de celles de z ; le problème est donc de calculer la fonction $r(z)$ sachant que

$$r(0) = r_0 \quad \text{et que } r'(0) = r'_0 \ll 1$$

L'équation différentielle qui gouverne la trajectoire est :

$$\frac{d}{dz} \left[n(r) \frac{dr}{dz} \right] = \nabla n(r) \rightarrow n_0(1 - kr^2) \frac{d^2 r}{dz^2} + r' (-2kn_0 r r') = -2kn_0 r$$

compte tenu du fait que $r' \ll 1$ on se ramène à l'équation simple :

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + 2kr = 0 \rightarrow r(z) = r_0 \cos(z/Z) + Zr'_0 \sin(z/Z)$$

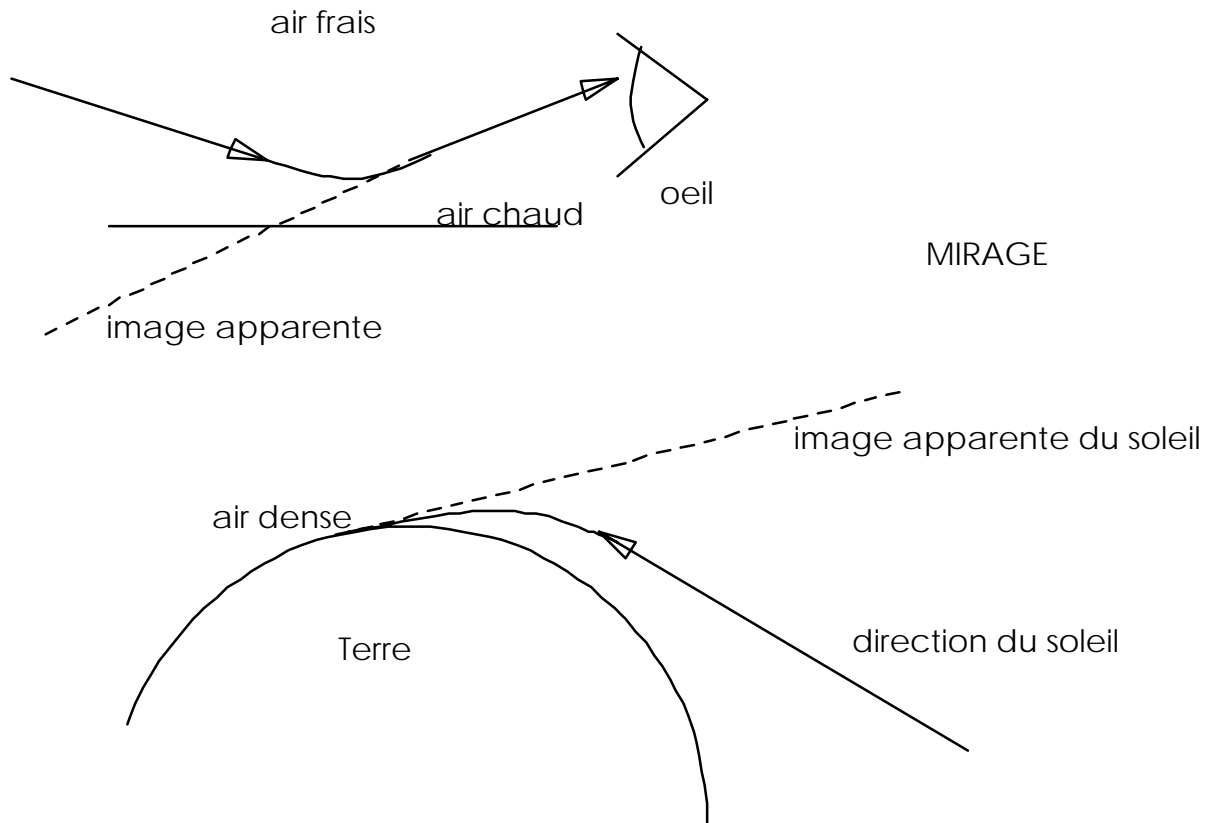
ainsi la trajectoire est sinusoïdale et le rayon se propage en restant confiné dans une portion de la fibre (à condition que son diamètre soit assez grand) ; à la sortie de la fibre, en $z=L$, chaque rayon sort en un point donné par $r(L)$ avec une orientation $r'(L)$; l'étudiant pourra montrer que, au premier ordre, tous ces rayons convergent vers un même point de l'axe Oz , à une distance $L+h$.

$$h = \frac{1}{n_0} Z \cot g(L/Z)$$

Incidentement, ce calcul est loin d'être « académique » : une même fibre optique permet la transmission de plusieurs faisceaux optiques séparément, chacun d'une couleur donnée ; si les couleurs sont ordonnées suivant l'angle d'entrée du faisceau, $r'(0)$, chacun sortira de la fibre avec un angle différent ; d'où la possibilité de séparer les différentes couleurs : la fibre aura transporté plusieurs faisceaux (plusieurs informations) de manière indépendante.

= mirages

La même raison physique explique l'effet « mirage » ; au voisinage du sol chauffé par le soleil la densité de l'air, et donc son indice optique, sont plus faibles qu'à une certaine distance du sol ; un objet lointain pourra donc se refléter sur les couches basses de l'atmosphère, conférant au sol une allure de miroir.



Les exemples qui en pratique « utilisent » cette propriété des rayons d'être déviés dans un milieu d'indice lentement variable , sont nombreux ; le coucher de soleil qui dure plus longtemps que prévu , le cheminement des ondes acoustiques dans la mer dont la salinité , la température entraînent des variations d'indice acoustique conduit à des effets de mirage très redoutés des marins , les fluctuations de densité de particules dans l'atmosphère la plus périphérique engendre des difficultés d'observation astronomique et justifie en partie le recours aux satellites

Effet non linéaire : génération du second harmonique (milieux i.h.i.)

Le début de ce chapitre relèvait de la physique linéaire : les équations de Maxwell , la définition de la constante diélectrique , le modèle de polarisation , la conductivité électrique . En raison de l'importance technique des effets non linéaires en optique , en télécommunications ou en physique, il est nécessaire de présenter dans un cours de licence au moins un exemple d'effet non linéaire ; on a choisi de traiter cette année la génération de second harmonique .

La non linéarité de la réponse d'un diélectrique à une perturbation d'ondes électromagnétiques permet des échanges d'énergie entre des ondes de fréquences différentes ; c'est là toute son importance . Les applications les plus fréquentes de cette non linéarité sont : la génération de second harmonique : une « onde -pompe » de pulsation ω donne naissance à une onde de pulsation 2ω , l'oscillation paramétrique : une « onde-pompe » de fréquence ω donne naissance à deux ondes ω' et ω'' avec $\omega = \omega' + \omega''$, la conversion de fréquence : une onde de basse fréquence ω et de faible puissance donne naissance à une onde de haute fréquence ω' par mélange avec une « onde-pompe » de forte puissance et de fréquence ω'' avec $\omega' = \omega'' - \omega$.

C'est la recherche permanente de faisceaux optiques cohérents de toutes les fréquences qui motivent ces différentes dispositions .

= la susceptibilité optique non linéaire

- définition des coefficients

On exprime la propriété de non linéarité optique par la relation suivante :

$$P_{NL,\alpha}(\omega_3) = \sum_{\beta,\gamma} d_{\alpha\beta\gamma}(\omega_3, \omega_2, \omega_1) E_{\beta}(\omega_2) E_{\gamma}(\omega_1)$$

dans cette formule les indices α, β, γ désignent les axes de coordonnées du cristal ; comme dans cette définition on peut intervertir les champs d'indices β et γ les coefficients $d_{\alpha\beta\gamma}$ doivent être symétriques en β et γ eux aussi . Dans la plupart des cristaux ces coefficients sont indépendants des fréquences , tant que l'on reste dans le domaine optique , c'est à dire tant que les polarisations mises en jeu sont de nature électronique .

Par extension , lorsque l'une des trois fréquences est nulle , c'est à dire lorsque l'un des champs électriques appliqués est statique , on nomme ces mêmes coefficients : « coefficients électro-optiques » ; leur valeur numérique est quelquefois assez différente de la « susceptibilité optique non linéaire » ; dans ce cas , c'est la traduction d'une propriété « pathologique » du cristal ; ces anomalies sont recherchées .

On dit des coefficients $d_{\alpha\beta\gamma}$ que ce sont les éléments d'un tenseur d'ordre trois ; la connaissance des éléments de symétrie du cristal permet de savoir a priori quels coefficients $d_{\alpha\beta\gamma}$ sont nuls ou égaux .

- un modèle pour la non linéarité

En revenant au modèle de la susceptibilité dépendante du temps , on écrira ici que le déplacement d'un électron lié à un atome , sous l'influence d'un champ électrique local , se fait avec **une force additionnelle de rappel qui dépend du carré du déplacement** ; ou encore que le potentiel dans lequel il se déplace est anharmonique ; la nouvelle équation mécanique est :

$$QE_{loc} - \eta \frac{dl}{dt} = \frac{Q^2 l}{\alpha} + M \frac{d^2 l}{dt^2} + N l^2$$

le dernier terme est le terme additionnel par rapport à l'équation développée dans le chapitre VI ; N est le coefficient microscopique correspondant qui doit permettre de calculer la constante macroscopique $d_{\alpha\beta\gamma}$; on le suppose assez petit pour que le terme non linéaire dans l'équation du mouvement soit une perturbation du terme linéaire .

La résolution de l'équation du mouvement se fait par approximations successives ; on procède par une méthode d'itération . Si le champ local est de la forme

$$E_{loc} = \frac{E_0}{2} [\exp(i\omega t) + cc]$$

on cherche la solution d'ordre zéro (à la fréquence ω , sans terme non linéaire) , puis la solution à l'ordre un en identifiant dans l'équation tous les termes à la fréquence 2ω , puis; on cherche donc les solutions du type :

$$l(t) = \tilde{l}_1(\omega)[\exp(i\omega t) + cc] + \tilde{l}_2(2\omega)[\exp(2i\omega t) + cc] + ..$$

Après un calcul simple on obtient successivement :

$$\tilde{l}_1(\omega) = \frac{\alpha}{Q} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\eta\omega}{M}} E_0 \quad (\text{résultat déjà donné dans un paragraphe précédent Ch VI})$$

$$\begin{aligned} \tilde{l}_2(2\omega) &= -\frac{N}{2M} \frac{\tilde{l}_1^2(\omega)}{\omega_0^2 - 4\omega^2 + i \frac{2\eta\omega}{M}} \\ &= -\frac{N}{2M} \left(\frac{\alpha}{Q}\right)^2 \frac{1}{\omega_0^2 - 4\omega^2 + i \frac{2\eta\omega}{M}} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\eta\omega}{M}}\right)^2 E_0^2 \end{aligned}$$

on en déduit la composante de fourier du moment dipolaire $\tilde{p}_2(2\omega) = Q\tilde{l}_2(2\omega)$, une expression de la polarisation par unité de volume à la fréquence double et enfin par identification le coefficient

$$d_{\alpha\beta\gamma}(\omega_3, \omega_2, \omega_1) = d_{\alpha\beta\gamma}(2\omega, \omega, \omega) = -\frac{n}{\epsilon_0} \frac{N}{2} \left(\frac{Q}{M}\right)^3 \frac{1}{\omega_0^2 - 4\omega^2 + i \frac{2\eta\omega}{M}} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\eta\omega}{M}}\right)^2$$

Ce modèle vaut ce qu'il vaut ! il n'est pas plus performant que celui donné pour la susceptibilité linéaire ; c'est plus « une manière de voir » , bâtie pour montrer l'origine du phénomène qu'un vrai calcul de physicien .

Quantitativement , ces coefficients peuvent varier d'un cristal à un autre de trois ou quatre ordres de grandeurs ! pour obtenir un doublage de fréquence en optique , il y a donc intérêt à bien choisir son échantillon ! C'est aujourd'hui encore un sujet de recherche permanent où la contribution des chimistes est essentielle pour trouver les molécules les plus polarisables . On vérifie et on montre aussi que les plus grandes valeurs de $d_{\alpha\beta\gamma}$ sont associées aux plus grandes valeurs des susceptibilités linéaires et même aux comportements pathologiques des cristaux .

= Les équations de l'électromagnétisme pour les effets non linéaires

Le but maintenant est de montrer comment une onde de fréquence double est engendrée par une onde primaire .

La polarisation \mathbf{P} qui intervient dans les équations de propagation des ondes comprend deux termes : la contribution linéaire et la partie non linéaire que l'on vient de modéliser :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} + \mathbf{P}_{NL}$$

On supposera le diélectrique est sans perte , sans conductivité , sans propriétés magnétiques et que la propagation des trois ondes de fréquences $\omega_3, \omega_2, \omega_1$ se fait dans la direction z . Des équations de Maxwell il résulte l'équation de propagation des ondes :

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}$$

Pour chercher les solutions de cette équation on est dans une situation voisine (seulement voisine) de celle qui a permis de modéliser le coefficient $d_{\alpha\beta\gamma}$; en effet ici on n'a plus des modes localisés (vibrations des électrons au voisinage de leur noyau atomique de rattachement) , mais des modes propagatifs (les trois ondes électromagnétiques) . **Le prix à payer pour cette « complication obligatoire » est de devoir écrire que l'amplitude de l'onde variera doucement avec la longueur parcourue ; c'est ce que l'on appelle l'« approximation des ondes longues » ; (voir aussi l'équation de l'éikonale) en optique elle est très souvent justifiée car l'amplitude change peu à l'échelle d'une longueur d'onde ; en acoustique ou en mécanique il faut être plus précautionneux .**

Pour ne pas surcharger les notations , on oubliera dans la suite le caractère tensoriel des coefficients $d_{\alpha\beta\gamma}$ et des champs électriques .

On écrira :

$$E(\omega_1, z, t) = \frac{1}{2} [E(\omega_1, z) \exp i(\omega_1 t - k_1 z) + cc] \quad \text{et de même pour les deux autres ondes ; on posera : } \omega_1 = \omega_3 - \omega_2 \quad \text{et } d(\omega_3, \omega_2, \omega_1) = d .$$

Introduite dans l'équation de propagation , cette expression , avec l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, donnera trois termes ; on ne gardera que les deux premiers :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} [E(\omega_1, z, t)] \cong -\frac{1}{2} [k_1^2 E(\omega_1, z) + 2ik_1 \frac{\partial E(\omega_1, z)}{\partial z}] \exp i(\omega_1 t - k_1 z) + cc$$

car « l'approximation des ondes longues » signifie exactement que :

$$E(\omega_1, z) \gg k_1 \frac{\partial E(\omega_1, z)}{\partial z} \gg k_1^2 \frac{\partial^2 E(\omega_1, z)}{\partial z^2}$$

Garder seulement le premier terme c'est rester dans le domaine linéaire ; garder le premier et le deuxième c'est faire une approximation au premier ordre , en général suffisante .

On tiendra compte de la dispersion des ondes c'est à dire du fait que leur vitesse dépend de leur fréquence ; dans la pratique c'est indispensable encore que ce soit un handicap expérimental ; on posera : $k_3 - k_2 - k_1 = \Delta k$.

La composante de la polarisation non linéaire à la fréquence ω_1 est :

$$P_{NL}(\omega_1, z, t) = \frac{1}{2} d \{ E(\omega_3, z) E^*(\omega_2, z) \exp i[(\omega_3 - \omega_2)t - (k_3 - k_2)z] + cc \}$$

En reportant une expression analogue dans l'équation de propagation de chaque mode $\omega_3, \omega_2, \omega_1$ on obtient trois équations couplées qui , suivant les approximations qui sont faites , permettent de rendre compte de tous les phénomènes de couplage de trois ondes propagatives :

$$\frac{\partial E(\omega_1, z)}{\partial z} = -i \frac{\omega_1^2}{k_1} \frac{d}{2} \mu_0 E(\omega_3, z) E^*(\omega_2, z) \exp(-i \Delta k z)$$

$$\frac{\partial E(\omega_2, z)}{\partial z} = -i \frac{\omega_2^2}{k_2} \frac{d}{2} \mu_0 E(\omega_3, z) E^*(\omega_1, z) \exp(-i \Delta k z)$$

$$\frac{\partial E(\omega_3, z)}{\partial z} = -i \frac{\omega_3^2}{k_3} \frac{d}{2} \mu_0 E(\omega_2, z) E(\omega_1, z) \exp(i \Delta k z)$$

On s'efforce de donner à ces équations une forme plus symétrique en exprimant trois quantités proportionnelles aux champs :

$$A(\omega_1, z) = \left(\frac{\omega_1^2}{k_1} d \mu_0 \right)^{-1/2} E(\omega_1, z)$$

moyennant quoi les trois équations couplées prennent la forme plus sympathique suivante :

$$\frac{\partial A(\omega_1, z)}{\partial z} = -\frac{i}{2} \kappa A(\omega_3, z) A^*(\omega_2, z) \exp(-i \Delta k z)$$

$$\frac{\partial A(\omega_2, z)}{\partial z} = -\frac{i}{2} \kappa A(\omega_3, z) A^*(\omega_1, z) \exp(-i \Delta k z)$$

$$\frac{\partial A(\omega_3, z)}{\partial z} = -\frac{i}{2} \kappa A(\omega_2, z) A(\omega_1, z) \exp(i \Delta k z)$$

$$\text{avec : } \kappa = \left(\frac{\omega_1^2}{k_1} \frac{\omega_2^2}{k_2} \frac{\omega_3^2}{k_3} d^3 \mu_0^3 \right)^{1/2}$$

= génération du second harmonique

Dans ce cas les deux fréquences ω_2 et ω_1 sont égales à ω (même onde) et $\omega_3 = 2\omega$. C'est cette onde que l'on cherche à créer avec le maximum d'intensité à partir de l'onde primaire à la fréquence ω ; cette dernière est envoyée avec le maximum d'intensité tandis que son harmonique a une intensité faible , au moins au début du trajet dans l'échantillon . On rencontre alors deux cas pratiques .

Si l'on suppose que l'onde primaire perd peu d'énergie ($E(\omega, z) \cong \text{cte}$) , et si le cristal a une longueur L (distance de propagation des ondes) , la seule équation à résoudre est la dernière et :

$$E(2\omega, L) = E(2\omega, 0) - \frac{(2\omega)^2}{2k + \Delta k} \mu_0 \frac{d}{2} E^2(\omega, 0) \frac{\exp(i\Delta k L) - 1}{i\Delta k}$$

Le plus souvent , il n'y a pas de faisceau incident à la fréquence double et $E(2\omega, 0) = 0$. (On trouvera dans le cours d'introduction à la mécanique quantique une explication subtile et plus physique qui explique comment dans ces circonstances l'amplification démarre par effet stimulé sur le demi quantum de champ de fréquence 2ω) .

Le flux d'intensité lumineuse $\phi(2\omega)$ à la fréquence double s'exprime en fonction de celui à la fréquence simple $\phi(\omega)$ et des caractéristiques du matériaux qui assure la conversion de fréquence (d , loi de dispersion , longueur) :

$$\phi(2\omega) \approx \phi^2(\omega) d^2 L^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)$$

La longueur $l_c = \frac{2\pi}{\Delta k}$ s'appelle « longueur de cohérence » ; c'est la longueur maximum du cristal qui est utile pour produire le second harmonique ; en général : $l_c \ll 1\text{mm}$; cette petite longueur oblige à travailler avec des échantillons minces ; ce n'est pas le plus facile ! . Cette longueur est le résultat de la dispersion des ondes électromagnétiques , c'est à dire du fait que l'indice optique dépend de la fréquence . Il n'y a aucun moyen d'éviter cet « inconvénient » en doublage de fréquence sauf à tailler des cristaux dans des directions spéciales et en jouant sur leur caractère uniaxe (cristaux anisotropes) ; quand on trouve certaines directions pour lesquelles $\Delta k = 0$, on dit qu'il y a « accord de phase » .

Dans le deuxième cas , l'intensité de l'onde à ω diminue au profit de celle à 2ω ; il faut résoudre deux équations couplées car $A(\omega, z)$ comme $A(2\omega, z)$ sont fonction de z .

$$\frac{\partial A(2\omega, z)}{\partial z} = -\frac{i}{2}\kappa A^2(\omega, z)\exp(i \Delta k z)$$

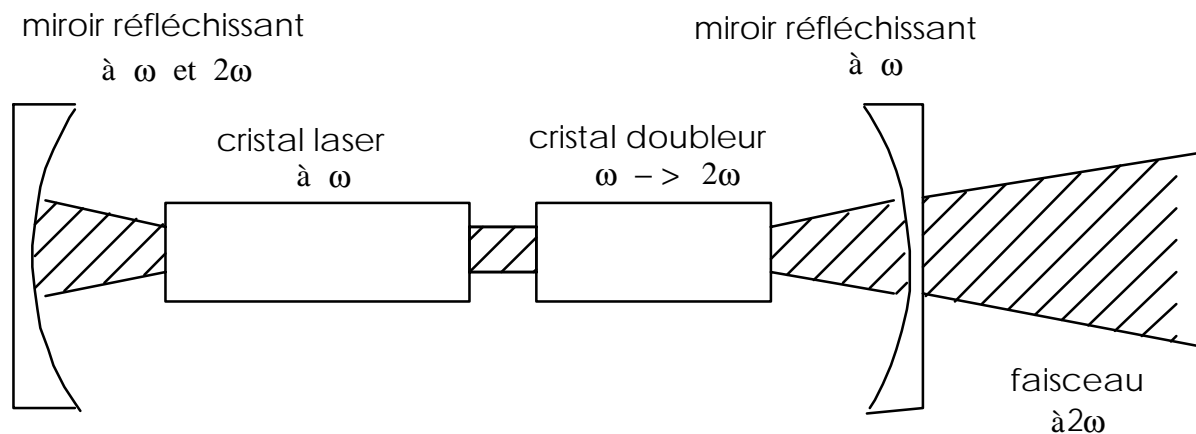
$$\frac{\partial A(\omega, z)}{\partial z} = -\frac{i}{2}\kappa A(2\omega, z)A^*(\omega, z) \exp(i \Delta k z)$$

On connaît une solution si il y a accord de phase et on trouve :

$$A(2\omega, z) = -iA(\omega, 0) \tanh\left[\frac{1}{2\kappa} A(\omega, 0) z\right]$$

S'il n'y avait aucune source d'atténuation tous les photons à ω seraient convertis en photons à 2ω pour un trajet assez grand dans le cristal .

Le dispositif expérimental que l'on utilise est le suivant : la source primaire est l'élément central d'un laser , le cristal doubleur de fréquence est introduit dans la cavité laser mais l'un des miroirs réfléchissant de la cavité est passant à la fréquence double .



Réflexion et réfraction d'une onde optique sur un dioptre plan (milieux l.h.i.)

Le problème que l'on se pose est : qu'advient-il d'une onde optique monochromatique incidente sur l'interface de deux diélectriques ou d'un diélectrique et du vide . Problème fondamental en optique où l'on rencontre à la fois des dioptrés plans , courbés , des lentilles , des miroirs; sa solution gouverne toute l'optique .

Ce paragraphe traite des diélectriques homogènes , linéaires , isotropes , non magnétiques et non conducteurs ; c'est le cas du verre dont sont faites les lunettes et tous les instruments d'observation . La nouveauté par rapport au paragraphe précédent est l'introduction d'une

surface de discontinuité entre deux diélectriques ; on perd la propriété d'avoir des milieux infinis ; les conditions d'interface revêtent toute leur importance .

= conditions imposées à l'interface de deux diélectriques

A l'interface de deux diélectriques non conducteurs et non magnétiques 1 et 2 on a vu au chapitre VI précédent que \mathbf{B} et \mathbf{H} doivent être continus et que :

$$[\mathbf{D}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{D}_1(\mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{n}_{1,2} = 0$$

$$[\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{n}_{1,2} = \frac{1}{\epsilon_0} [\mathbf{P}_1(\mathbf{r}, t) - \mathbf{P}_2(\mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{n}_{1,2}$$

L'une ou l'autre de ces équations résulte du fait que \mathbf{D} est sans divergence . De plus

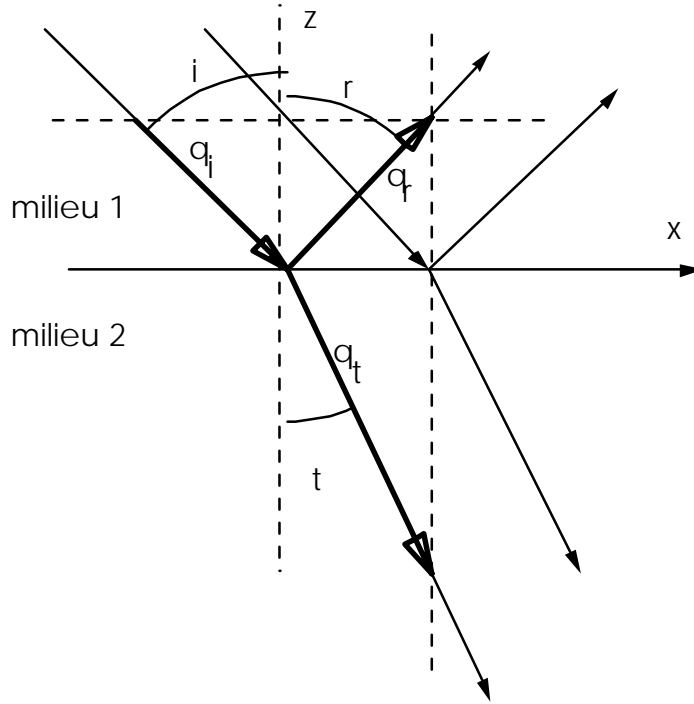
$$[\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)] \times \mathbf{n}_{1,2} = 0$$

c'est à dire que la composante tangente de \mathbf{E} est continue .

= caractérisation des ondes dans les deux diélectriques

L'observation expérimentale (et même la vie ordinaire !) montre qu'un rayon lumineux tombant obliquement sur un dioptre donne naissance à un rayon réfléchi (le soleil se réfléchit sur les vagues jusqu'à aveugler !) et à un rayon transmis à travers le dioptre (la lumière pénètre par les fenêtres !)

On définit les notations suivantes en ajoutant que parallèlement à la surface du dioptre il y a invariance par translation .



Le paragraphe précédent a montré que dans chaque diélectrique il existe un vecteur d'onde et que chaque onde se propage dans une direction donnée, rectiligne ; comment ces directions sont-elles reliées à l'interface de deux diélectriques, quels sont les flux d'énergie ; telles sont les questions auxquelles on veut répondre dans le cas où les deux milieux 1 et 2 sont isotropes .

- rayon « incident » dans le milieu 1 : indice « i »

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i0} \cos(\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

$$\omega = \frac{c}{n_1(\omega)} q_i$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{\omega} \mathbf{q}_i \times \mathbf{E}_{i0} \cos(\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \mu_0 \mathbf{H}_i$$

$$\mathbf{D}_i = \epsilon_1(\omega) \mathbf{E}_{i0} \cos(\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \epsilon_0 \epsilon_{1r}(\omega) \mathbf{E}_{i0} \cos(\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

- rayon « réfléchi » dans le milieu 1 : indice « r »

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r0} \cos(\mathbf{q}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_r)$$

$$\omega = \frac{c}{n_1(\omega)} q_r$$

$$\mathbf{B}_r = \frac{1}{\omega} \mathbf{q}_r \times \mathbf{E}_{r0} \cos(\mathbf{q}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_r)$$

$$\mathbf{D}_r = \epsilon_1(\omega) \mathbf{E}_{r0} \cos(\mathbf{q}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_r)$$

- rayon « transmis » dans le milieu 2 : indice « t »

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t0} \cos(\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_t)$$

$$\omega = \frac{c}{n_2(\omega)} q_t$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{1}{\omega} \mathbf{q}_t \times \mathbf{E}_{t0} \cos(\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_t)$$

$$\mathbf{D}_t = \varepsilon_2(\omega) \mathbf{E}_{t0} \cos(\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_t)$$

= lois géométriques de la réflexion et de la réfraction

- première loi de Descartes

Les équations de Maxwell étant linéaires ainsi que les milieux 1 et 2 les fréquences des trois ondes : i, r, t, sont identiques.

La continuité de la composante tangente (indice T) de \mathbf{E} dans tout le plan du dioptre ($z=0$ pour tous les points du dioptre) impose :

$$\mathbf{E}_{i0,T} \cos(\mathbf{q}_{i,T} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_i) = \mathbf{E}_{r0,T} \cos(\mathbf{q}_{r,T} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_r) + \mathbf{E}_{t0,T} \cos(\mathbf{q}_{t,T} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

en conséquence, puisque l'on a ici une identité pour tout \mathbf{r} dans le plan $z=0$ et pour tout t :

$$\mathbf{q}_{i,T} = \mathbf{q}_{r,T} = \mathbf{q}_{t,T}$$

c'est à dire que les composantes tangentielles des trois vecteurs d'onde sont identiques et que les trois vecteurs sont dans le même plan d'incidence défini par la normale au dioptre et le vecteur \mathbf{q}_i ; on choisira le plan d'incidence parallèle à x.

En termes plus savants, cette conservation de la composante tangente des vecteurs d'onde résulte de la symétrie suivante : invariance par translation du système pour toute translation parallèle au dioptre ; en d'autres termes c'est aussi le principe de conservation de la quantité de mouvement des photons le long du plan du dioptre.

- deuxième loi de Descartes

La fréquence des trois ondes est la même ; dans le milieu 1 les modules des deux vecteurs \mathbf{q}_i et \mathbf{q}_r sont donc identiques ; comme leurs composantes tangentielles sont égales les deux angles i et r sont égaux ; enfin comme $\mathbf{q}_{r,T} = \mathbf{q}_{t,T}$:

$$n_1(\omega) \sin(r) = n_2(\omega) \sin(t) \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{n_1(\omega) \sin(i)} = \frac{1}{n_2(\omega) \sin(t)}$$

La première formule donne géométriquement très simplement la direction du rayon réfracté quand on connaît celle de l'incident ; on dessine la surface des indices des deux milieux et la loi de Descartes est équivalente à s'assurer que les composantes tangentes sont égales . La deuxième formule permet de tracer la surface d'onde , dont les rayons sont proportionnels à l'inverse de l'indice ; la construction géométrique assure que la même loi de Descartes est satisfaite . (voir ci dessous « construction de Fresnel)

- si $n_1(\omega) < n_2(\omega)$ la réfraction est toujours possible quel que soit l'angle d'incidence ; il y a une valeur limite pour l'angle r dans le milieu 2 ; on le note r_L ;

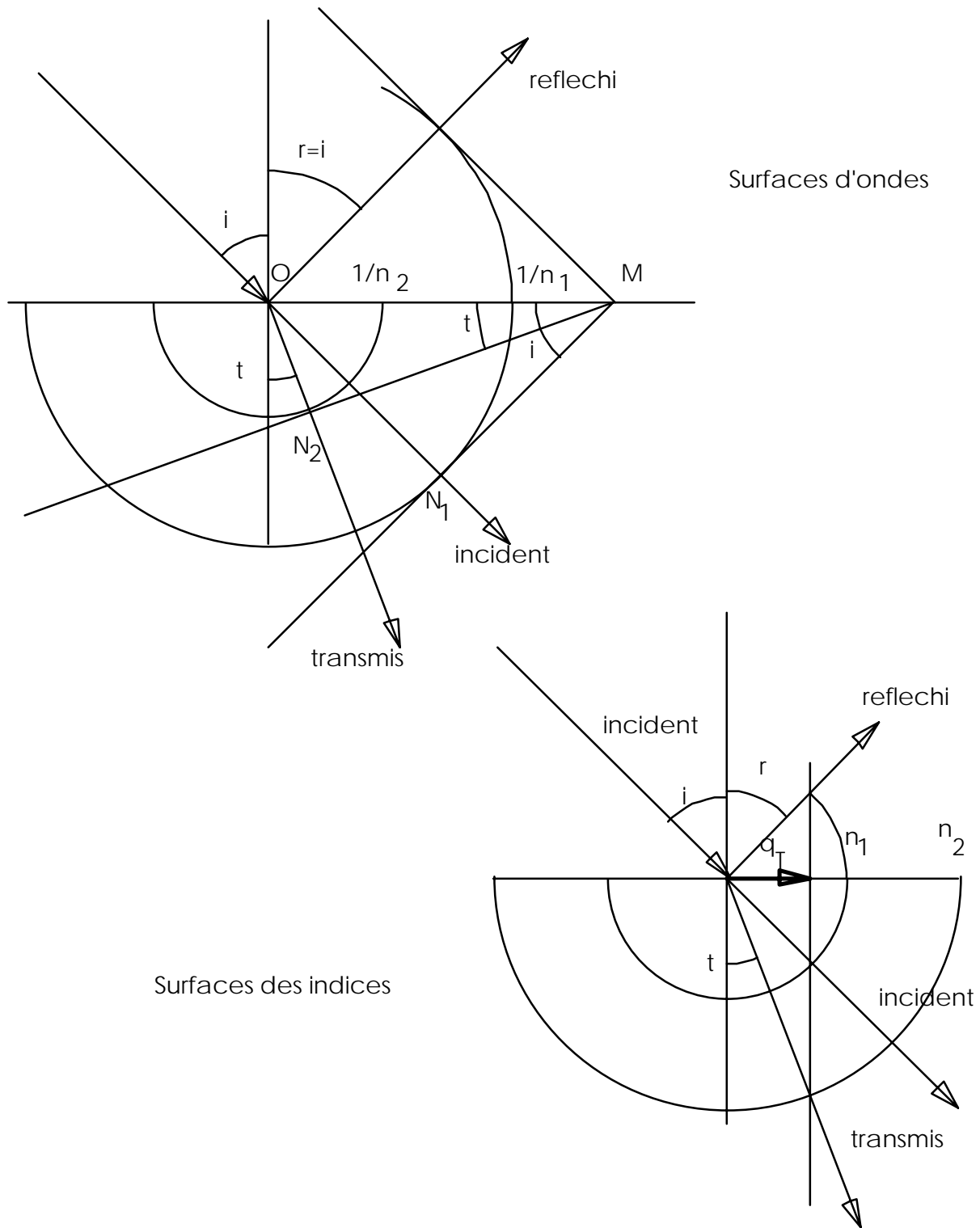
$$\sin(r_L) = \frac{n_2}{n_1}.$$

- si $n_1(\omega) > n_2(\omega)$ il y a un angle limite i_L pour i , au delà duquel il n'y a plus de rayon transmis ; on a « reflection totale » ;

Par ailleurs la considération des phases des différents rayons montre qu'elle doit être la même sur le dioptre : $\varphi_r = \varphi_t = 0$

- construction de Fresnel

C'est une construction géométrique qui permet de tracer les différents rayons réfléchis et réfractés : elle résulte de la conservation de la composante tangentielle des vecteurs d'onde ; on trace deux cercles dont les rayons sont proportionnels soit aux inverses des indices (surfaces d'ondes) soit proportionnels aux deux indices (surfaces des indices)



= relations entre les amplitudes des ondes ; relations de Fresnel

Sur la surface du dioptre les conditions de phase sont les mêmes quels que soient t et r ; les amplitudes seront donc déterminées par les seules conditions d'interface telles qu'elles sont

fixées par les équations de Maxwell . Il ne s'agit que de faire un inventaire des relations entre \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} et de déterminer quelles sont les équations indépendantes .

$$\mathbf{E}_{2T} = \mathbf{E}_{1T} \quad \rightarrow \quad E_{ix} + E_{rx} = E_{tx} \quad (1)$$

$$\rightarrow \quad E_{iy} + E_{ry} = E_{ty} \quad (2)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{E}}{\omega} \quad \mathbf{B}_{2N} = \mathbf{B}_{1N} \quad \rightarrow \quad q_{iy}E_{ix} + q_{ry}E_{rx} = q_{ty}E_{tx} \quad (3)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 n^2 \mathbf{E} \quad \mathbf{D}_{2N} = \mathbf{D}_{1N} \quad \rightarrow \quad q_i^2 (E_{iz} + E_{rz}) = q_t^2 E_{tz} \quad (4)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{E}}{\mu_0 \omega} \quad \mathbf{H}_{2T} = \mathbf{H}_{1T} \quad \rightarrow$$

$$(q_{iy}E_{iz} - q_{iz}E_{ry}) + (q_{ry}E_{rz} - q_{rz}E_{ry}) = (q_{ty}E_{tz} - q_{tz}E_{ty}) \quad (5)$$

$$q_{iz}E_{ix} + q_{rz}E_{rx} = q_{tz}E_{tx} \quad (6)$$

En fait , ces six équations ne sont pas indépendantes ; par application de la première loi de Descartes , (1) et (3) sont identiques . Le nombre des inconnues est en réalité de 9 : les trois composantes des trois champs : incident , réfléchi , transmis . Pourtant le nombre d'équations indépendantes suffit à résoudre le problème complètement puisque : les équations sont homogènes et que trois équations supplémentaires imposent que les champs soient transverses : c'est une propriété des ondes électromagnétiques dans les milieux isotropes :

$$\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{E}_i = 0 \quad \rightarrow \quad q_{iy}E_{iy} + q_{iz}E_{iz} = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{q}_r \cdot \mathbf{E}_r = 0 \quad \rightarrow \quad q_{ry}E_{ry} + q_{rz}E_{rz} = 0 \quad (8)$$

$$\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{E}_t = 0 \quad \rightarrow \quad q_{ty}E_{ty} + q_{tz}E_{tz} = 0 \quad (9)$$

La solution générale est possible mais fastidieuse ; il y a cependant deux cas particuliers qui méritent attention .

- le premier est celui où le champ incident est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence , c'est à dire :

$$E_{iy} = E_{iz} = 0$$

Or le déterminant des quatre équations indépendantes (2) (4) (7) (8) est non nul ; il faut donc que : $E_{rz} = E_{ry} = E_{ty} = E_{tz} = 0$; en d'autres termes , les ondes réfléchies et transmises sont elles aussi polarisées perpendiculairement au plan d'incidence .

En définissant les facteurs de réflexion et transmission en amplitudes par :

$$r_{\perp} = \frac{E_{rx}}{E_{ix}} \quad t_{\perp} = \frac{E_{tx}}{E_{ix}}$$

on calcule :

$$t_{\perp} = \frac{2 n_1 \cos(i)}{n_1 \cos(i) + n_2 \cos(t)} = \frac{2 \sin(t) \cos(i)}{\sin(t + i)}$$

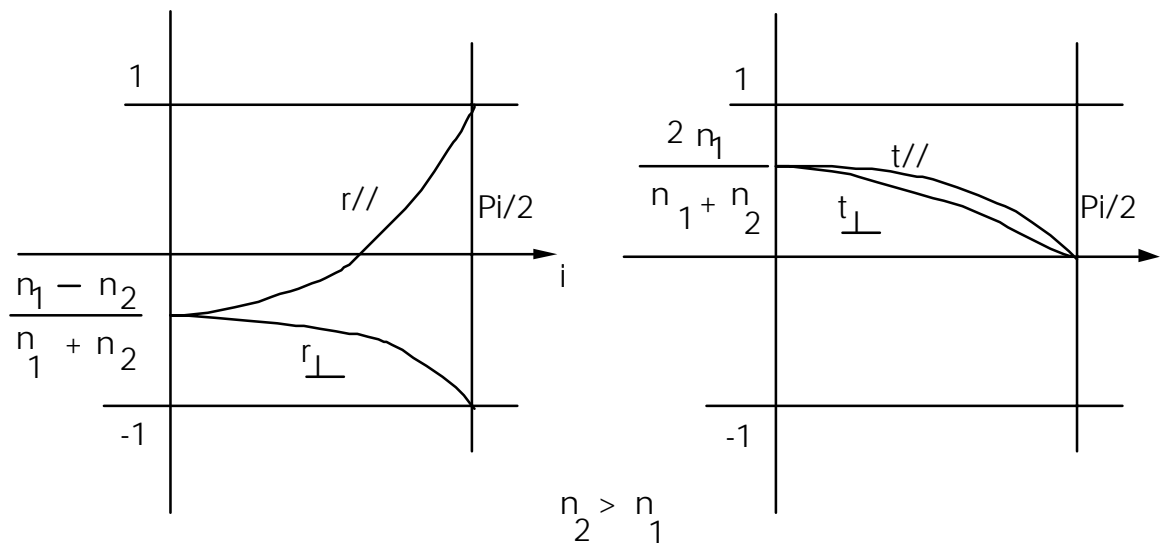
$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos(i) - n_2 \cos(t)}{n_1 \cos(i) + n_2 \cos(t)} = \frac{\sin(t - i)}{\sin(t + i)}$$

- le deuxième cas est celui où l'onde incidente est polarisée parallèlement au plan d'incidence ; on montre que ondes réfléchie et transmise sont elles aussi polarisées parallèlement au plan d'incidence ; on a de même :

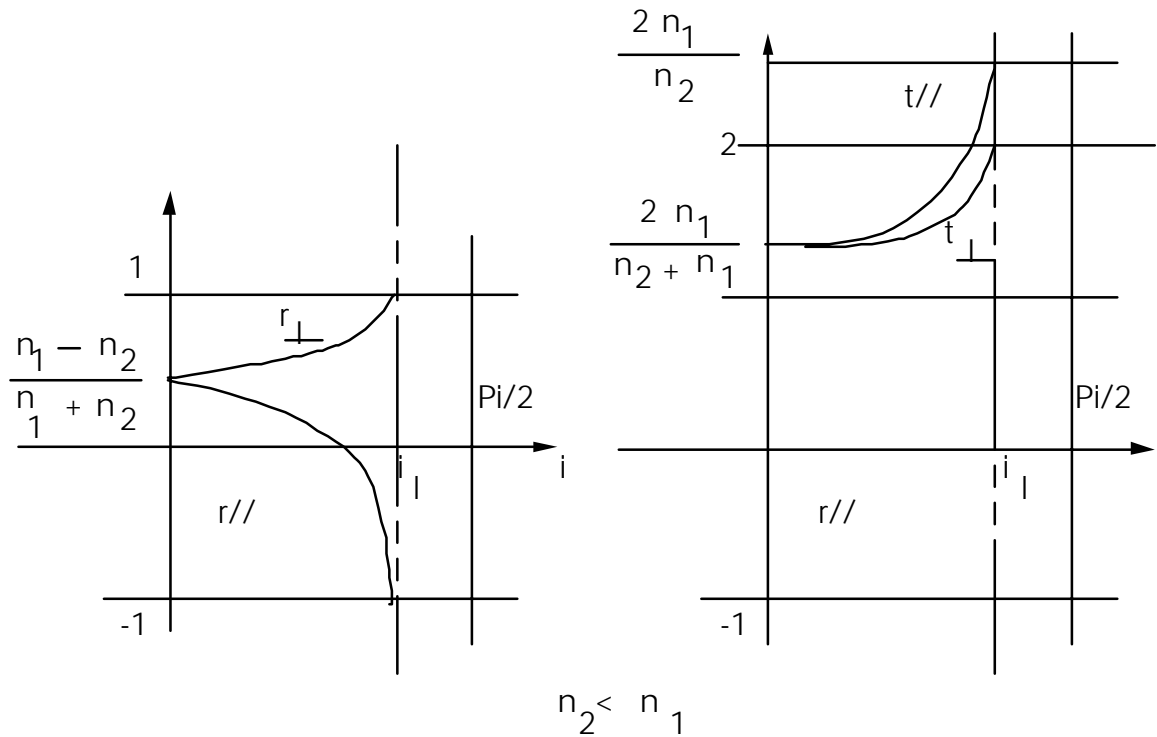
$$r_{//} = \frac{\text{tg}(t - i)}{\text{tg}(t + i)}$$

$$t_{//} = \frac{2 \sin(t) \cos(i)}{\sin(t + i) \cos(t - i)}$$

On resume les variations de ces quatre coefficients avec l'angle d'incidence i par les deux graphiques suivants :



Inversement , pour un milieu incident d'indice plus grand , on a un angle limite et les mêmes coefficients varient comme :



= considérations énergétiques

La quantité pertinente à estimer est le flux d'énergie moyen dans le temps de chaque onde : incidente , réfléchie , transmise .

Comme on l'a vu le flux d'énergie est déterminé par le vecteur de Poynting de chaque onde , soit :

$$\langle \mathbf{R}_i \rangle = \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E_i^2 \right) c n_1 \mathbf{q}_i^0$$

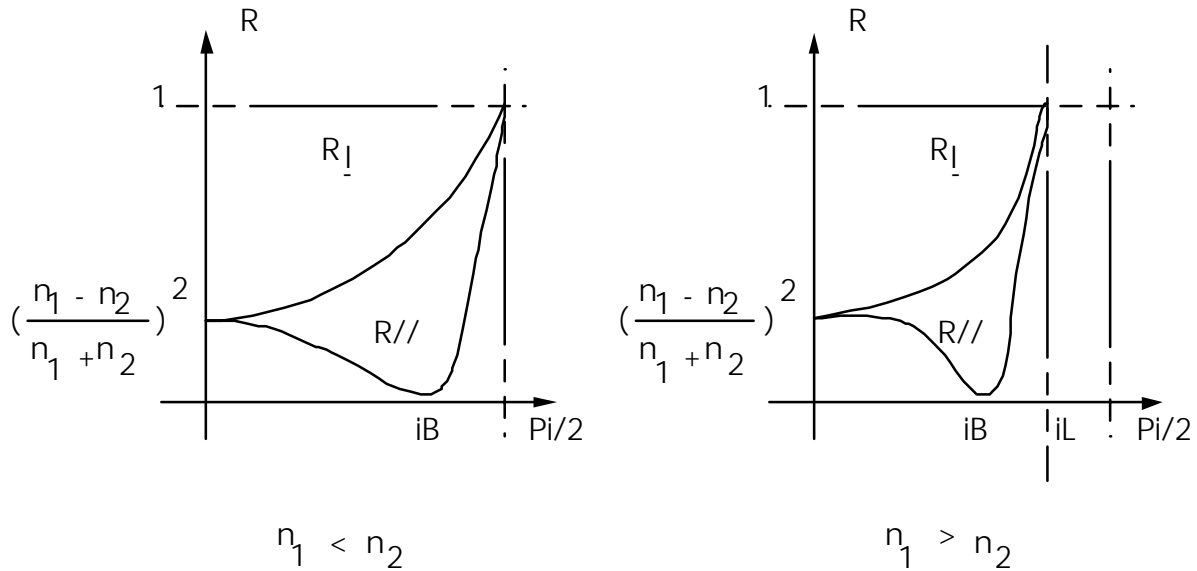
$$\langle \mathbf{R}_r \rangle = \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E_r^2 \right) c n_1 \mathbf{q}_r^0$$

$$\langle \mathbf{R}_t \rangle = \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E_t^2 \right) c n_2 \mathbf{q}_t^0$$

On définit généralement les coefficients de transmission T et de réflexion R en énergie par les deux formules :

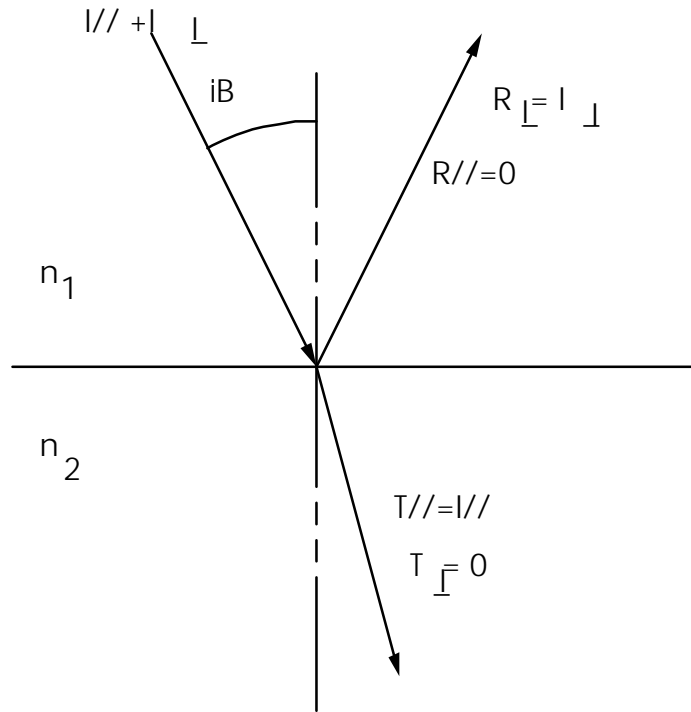
$$T = \frac{|\langle \mathbf{R}_t \rangle|}{|\langle \mathbf{R}_i \rangle|} \quad R = \frac{|\langle \mathbf{R}_r \rangle|}{|\langle \mathbf{R}_i \rangle|}$$

dans tous les cas $R+T = 1$; il y a conservation de l'énergie . On exprime R et T avec r et t et l'on peut tracer les courbes suivantes :



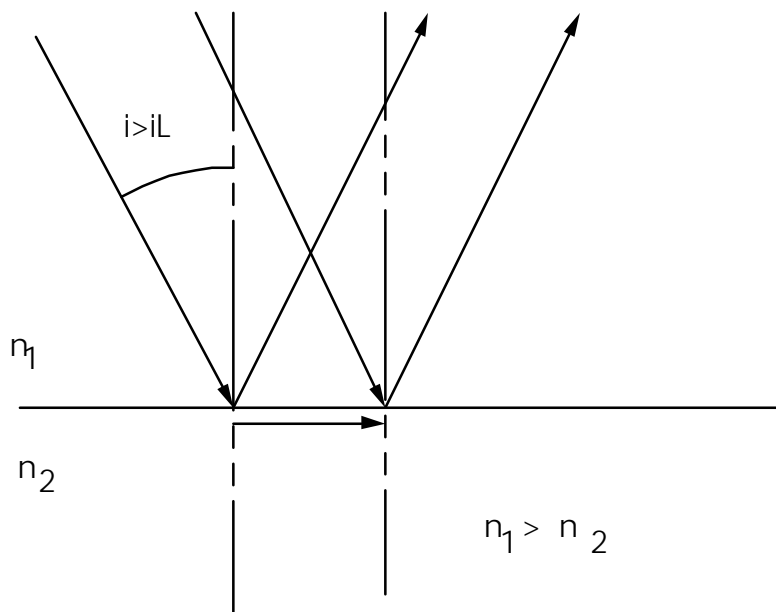
= conséquences des résultats précédents

- dans tous les cas il y a une incidence particulière , « l'angle de Brewster » qui donne un coefficient $R_{//} = 0$ pour iB ; d'où la possibilité de séparer une onde de polarisation quelconque , incidente à l'angle de Brewster , en une onde réfléchie polarisée perpendiculairement au plan d'incidence et en une onde transmise polarisée dans le plan d'incidence :



= conséquences de la réfraction totale

- onde évanescente (voir en TD)



- fibres de verre (voir un paragraphe précédent)

Milieux linéaires , homogènes , anisotropes (l.a.h.i.)

Un corps anisotrope , (un cristal) , a des « propriétés de matière » telles que la susceptibilité diélectrique , les constantes élastiques , la conductivité qui obéissent à des règles de symétrie ; plus formellement , les éléments de symétrie spatiale (rotation , translation , inversion) du cristal forment un groupe . Les « tenseurs de matière » (les « scalaires » comme la chaleur spécifique) , (les « tenseurs d'ordre un » comme la dilatation...) , (les « tenseurs d'ordre deux » comme la susceptibilité diélectrique...) , (les « tenseurs d'ordre trois » comme les coefficients electro-optiques ou les coefficients piézoélectriques...) , (les « tenseurs d'ordre quatre » tels que les coefficients élastiques ou élasto optiques ..) ne sont donc pas quelconques : le groupe de symétrie contraint les éléments de ces tenseurs a avoir certaines relations entre eux ou à être nuls .

De plus l'expression générale de l'énergie libre du cristal invite à considérer ces coefficients comme des dérivées d'ordre un , deux ,par rapport aux composantes des « champs » (la température , la variation de longueur , le champ électrique , la déformation élastique ...) ; cela entraîne des propriétés additionnelles pour les éléments des tenseurs de matière (on a vu le cas du coefficient de non linéarité d) .

Enfin des symétries plus subtiles (invariance par renversement du sens du temps , conjugaison) donnent des relations supplémentaires ; toutes ces symétries conduisent à grandement simplifier les tenseurs de matière . On se limitera ici au cas de la susceptibilité diélectrique , exemple suffisant pour illustrer les remarques précédentes et pour traiter de la propagation des ondes optiques dans un cristal anisotrope . Mais on ne peut qu'inviter les étudiants à aller travailler par eux mêmes cette question dans l'intérêt de leur formation d'ingénieur ou de physicien .

= symétrie du tenseur de « susceptibilité diélectrique »

Le tenseur de susceptibilité diélectrique est d'ordre deux car il relie un vecteur , la polarisation \mathbf{P} à un autre vecteur , le champ de maxwell \mathbf{E} . On écrit :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad \text{c'est à dire} \quad P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j \quad ; i \text{ ou } j \text{ varient de } 1 \text{ à } 3 \text{ ou de } x$$

à z ; il y a donc a priori neuf coefficients indépendants dans le cas général .

Le tenseur de constante diélectrique (ou de permittivité) a les mêmes propriétés :

$$D_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j = \sum_j \epsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}) E_j$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker (=1 si $i=j$, =0 dans le cas contraire)

Cela étant , nous avons montré que la variation d'énergie libre par unité de volume d'un diélectrique est

$$\delta f = \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \quad ;$$

la thermodynamique apprend que f étant un potentiel thermodynamique , et l'entropie étant fixée , la forme quadratique

$$\sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial D_i \partial D_j} \delta D_i \delta D_j \quad \text{est nécessairement définie positive .}$$

Il en résulte d'abord que $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ c'est à dire que la matrice correspondante est symétrique et qu'après intégration (on a ici un milieu linéaire) :

$$f = \sum_{ij} \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_i E_j$$

De manière très générale , il existe un changement d'axes qui , diagonalisant cette forme quadratique définie positive dans les nouveaux axes (X,Y,Z) , assure que :

$$f = \frac{1}{2} (\epsilon_X E_X^2 + \epsilon_Y E_Y^2 + \epsilon_Z E_Z^2) \quad \text{avec } \epsilon_{X,Y,Z} > 0$$

On dit des axes X,Y,Z que ce sont les « axes principaux » du tenseur de constante diélectrique ; **D** et **E** ne sont parallèles que si **E** est parallèle à l'un des axes principaux ou que si les trois valeurs principales sont identiques (cas isotrope pour un tenseur d'ordre deux) . On appelle

« indices principaux » les trois quantités $n_X^2 = \frac{\epsilon_X}{\epsilon_0} \dots$

Ces propriétés ont été vues dans un cours de mathématique du niveau Deug .

Dans les cas les moins symétriques , les axes principaux n'ont aucune raison de coïncider avec les axes cristallographiques ; et même , leur orientation dépend des valeurs numériques des constantes diélectriques et donc de la température puisqu'en général ces coefficients en dépendent .

Inversement , pour un groupe de symétrie donné , c'est à dire lorsque le cristal satisfait à certaines invariances par des opérations de symétrie , le tenseur des constantes diélectriques se simplifie ; ainsi pour un cristal cubique et un cristal quadratique il prend les figures suivantes :

ϵ_{11}	0	0
0	ϵ_{11}	0
0	0	ϵ_{11}

ϵ_{11}	0	0
0	ϵ_{11}	0
0	0	ϵ_{33}

dans ces cas particuliers , les axes principaux sont aussi les axes cristallographiques puisque dans ces axes ces tenseurs sont diagonaux .

= structure d'une onde monochromatique plane dans un diélectrique anisotrope

Cette structure résulte des équations de Maxwell dans un milieu diélectrique (absence de courants et de charges réels) .

$$\text{div} (\mathbf{D}) = 0$$

$$\text{div} (\mathbf{B}) = 0$$

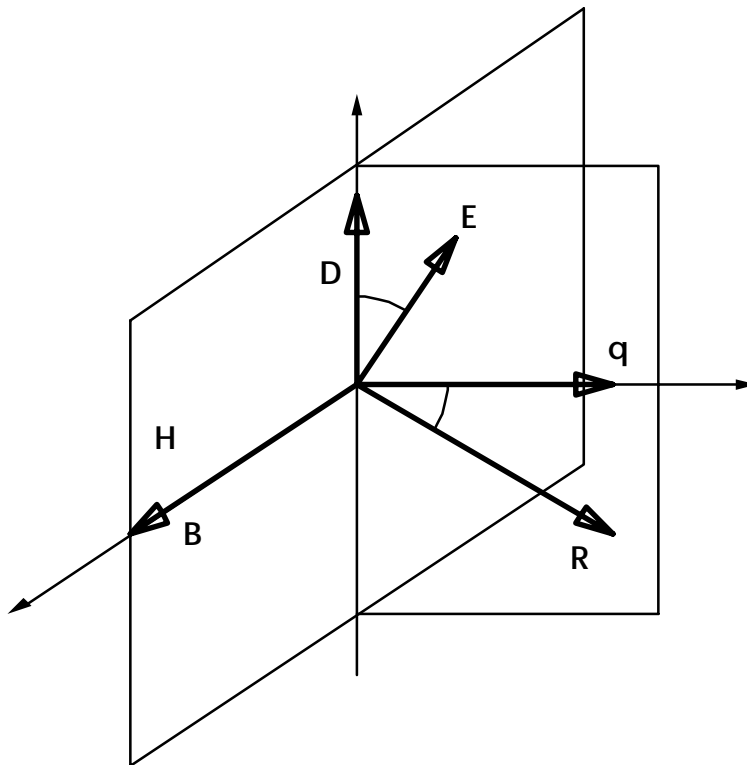
entraînent d'abord que \mathbf{D} et \mathbf{B} et donc \mathbf{H} sont perpendiculaires à \mathbf{q} vecteur d'onde, comme dans le vide ; la relation

$$\text{rot} (\mathbf{E}) = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

entraîne que \mathbf{E} est dans un plan perpendiculaire à \mathbf{B} ou \mathbf{H} c'est à dire dans le plan (\mathbf{D}, \mathbf{q}) ; mais dans un diélectrique anisotrope \mathbf{E} fait un angle avec \mathbf{D} ; cet angle est déterminé par le tenseur des constantes diélectriques .

Enfin le vecteur $\mathbf{R} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ fera le même angle avec le vecteur \mathbf{q} que \mathbf{D} et \mathbf{E} entre eux . Ainsi , dans un milieu anisotrope les rayons lumineux ne sont pas perpendiculaires aux plans d'onde . Nous apprendrons ultérieurement à trouver leur direction .

(voir figure)



- vitesse d'énergie (ou « radiale ») et vitesse de phase

La densité d'énergie électromagnétique est

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

quant aux équations de Maxwell elles fournissent :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{H}) &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \rightarrow & \quad \mathbf{q}(\mathbf{q})^0 \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} \\ \text{rot}(\mathbf{E}) &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \rightarrow & \quad \mathbf{q}(\mathbf{q})^0 \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2} \frac{q}{\omega} \sum (\mathbf{q})^0 \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{q}{\omega} (\mathbf{q})^0 \cdot \mathbf{R}$$

Ainsi en définissant la vitesse d'énergie (ou « radiale ») comme dans le cas isotrope par :

$$v_r = \frac{|\mathbf{R}|}{\langle f \rangle} \rightarrow = \frac{v\varphi}{\cos(\alpha)}$$

α est l'angle des deux vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{E} . La vitesse de phase est la projection de la vitesse d'énergie sur le vecteur d'onde

Moyennant quoi , avec les mêmes équations de Maxwell :

$$\mathbf{D} = -\frac{q^2}{\omega^2 \mu_0} (\mathbf{q})^0 \times [(\mathbf{q})^0 \times \mathbf{E}] = \frac{q^2}{\omega^2 \mu_0} [\mathbf{E} - (\mathbf{q})^0 ((\mathbf{q})^0 \cdot \mathbf{E})]$$

Le deuxième terme étant la composante de $\mathbf{E} //$ à \mathbf{q} , la partie entre crochets en est la composante perpendiculaire .

- équation aux indices

On cherche maintenant à déterminer quelle est la vitesse de phase pour une orientation du vecteur d'onde \mathbf{q} ; chercher l'indice optique ou la vitesse de phase est le même problème . A l'équation vectorielle précédente il faut ajouter la relation tensorielle $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$; en se plaçant dans le système des axes principaux on écrit trois équations telles que :

$$D_J = \varepsilon_J E_J = \frac{q^2}{\omega^2 \mu_0} [E_J - (\mathbf{q})_J^0 ((\mathbf{q})^0 \cdot \mathbf{E})] = \varepsilon_0 n^2 [E_J - (\mathbf{q})_J^0 ((\mathbf{q})^0 \cdot \mathbf{E})]$$

Ces trois équations forment un système d'équations linéaires et homogènes où les inconnues sont les composantes de \mathbf{E} ; leur déterminant doit être nul : c'est la condition qui fixe l'indice $n(\mathbf{q})$. A cette fin on écrit :

$$E_J = \frac{n^2 (\mathbf{q})_J^0 ((\mathbf{q})^0 \cdot \mathbf{E})}{n^2 - n_J^2}$$

en multipliant chacune par $(\mathbf{q})_J^0$ et en additionnant les trois équations d'indice J on a la condition cherchée :

$$\frac{1}{n^2} = \sum_J \frac{((\mathbf{q})_J^0)^2}{n^2 - n_J^2}$$

ou encore , après une petite manipulation :

$$\frac{n_X^2 [(\mathbf{q})_X^0]^2}{n^2 - n_X^2} + \frac{n_Y^2 [(\mathbf{q})_Y^0]^2}{n^2 - n_Y^2} + \frac{n_Z^2 [(\mathbf{q})_Z^0]^2}{n^2 - n_Z^2} = 0$$

C'est « l'équation aux indices » ; elle est quadratique en n^2 ou bicarrée en n ; elle a donc quatre racines : deux négatives et deux positives correspondant à des ondes qui se propagent en sens opposés ; les deux racines positives ont des valeurs numériques comprises entre la plus petite valeur (n_X par convention) et l'intermédiaire (n_Y), et entre l'intermédiaire et la plus grande (n_Z).

Après avoir résolu ce problème « aux valeurs propres » le calcul des « vecteurs propres » montre que suivant une direction quelconque les deux ondes, de vitesses de phase différentes sont polarisées rectilignement, et que leurs vecteurs déplacement électrique sont orthogonaux (ce que l'on aurait pu deviner !).

Pour un vecteur d'onde parallèle à un axe principal (X ou Y, Z) il existe deux « modes propres » ; pour une propagation suivant X les deux indices sont n_Y et n_Z puisque l'équation des indices est :

$$n_X^2 (n^2 - n_Y^2)(n^2 - n_Z^2) = 0$$

le mode qui correspond à l'indice n_Y est polarisé suivant Y, celui à l'indice n_Z est polarisé suivant Z.

Incidentement, notons que si il y a une racine double, pour rester conforme nos notations, sa valeur ne peut être que celle correspondant à n_Y .

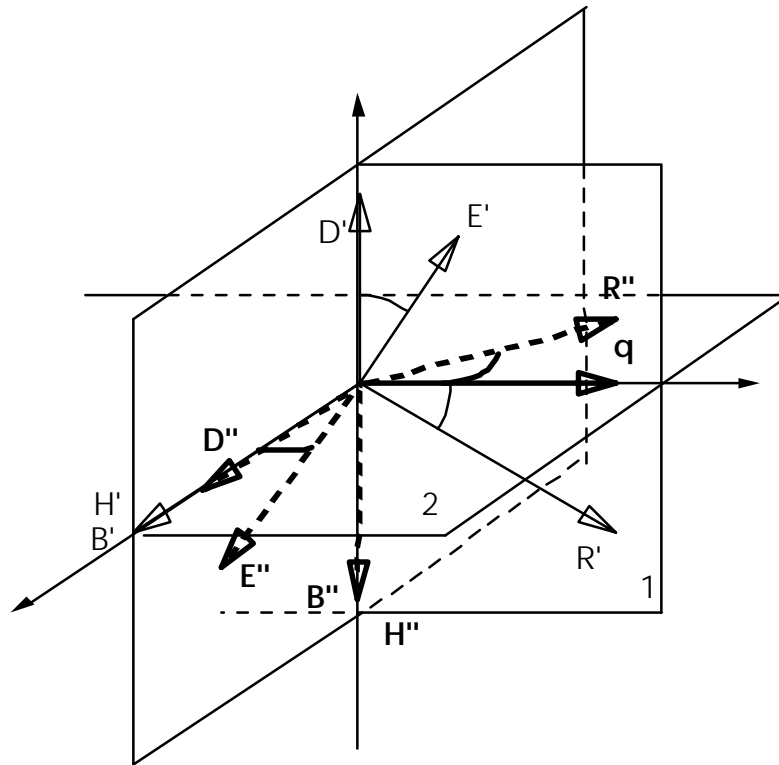
- équation aux vitesses

Par un petit calcul simple on transforme l'équation aux indices en « équation des vitesses » ; après avoir posé :

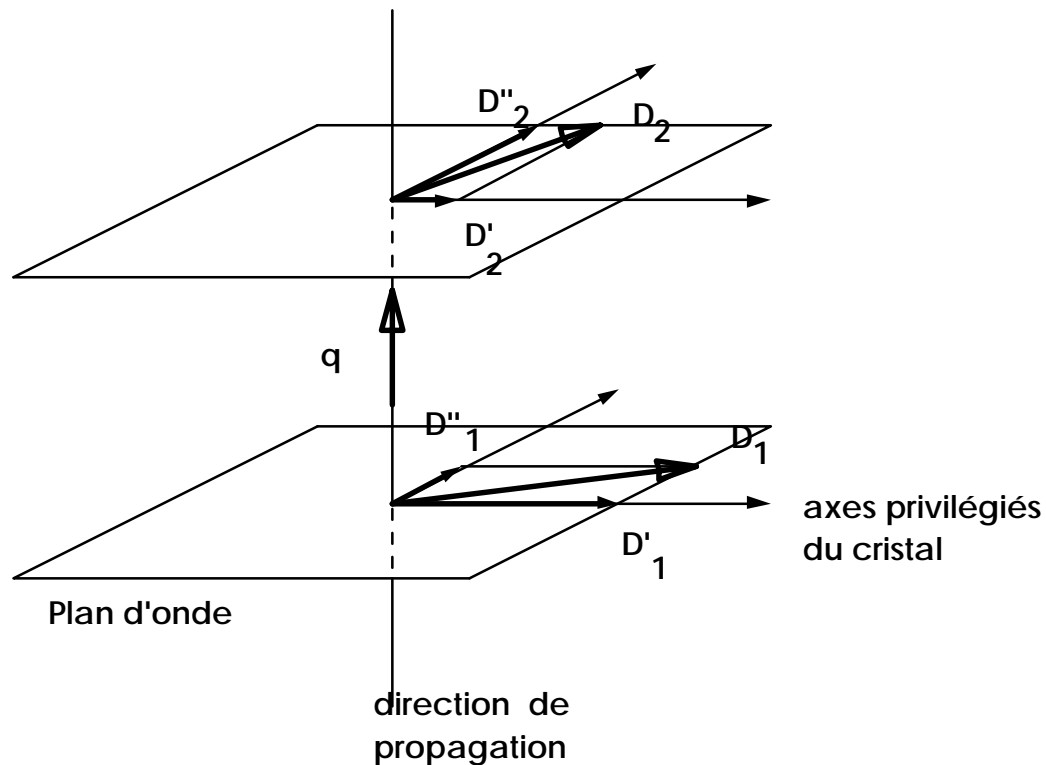
$$v_X = \frac{c}{n_X} \quad \dots \quad \text{on obtient :}$$

$$\frac{[(\mathbf{q})_X^0]^2}{v^2 - v_X^2} + \frac{[(\mathbf{q})_Y^0]^2}{v^2 - v_Y^2} + \frac{[(\mathbf{q})_Z^0]^2}{v^2 - v_Z^2} = 0$$

On résume la situation par la figure suivante où l'on a reporté d'abord l'onde « prime » correspondant à l'indice n' puis l'onde « seconde », d'indice n'' pour montrer les différents champs associés .



Comme dans un problème de vecteur propre , toute vibration incidente de vecteur \mathbf{D} se décompose de manière univoque par projection sur les deux modes \mathbf{D}' et \mathbf{D}'' ; mais ces deux modes se propagent avec des vitesses différentes , l'état de polarisation de l'onde initiale change pour donner une onde polarisée elliptiquement (voir figure ci dessous) .



Les deux « axes privilégiés » sont ceux qui , pour une direction quelconque de \mathbf{q} donnent les orientations de \mathbf{D}' et \mathbf{D}'' .

= « axes optiques » ; « surface des indices »

Toute la discussion suivante va se concentrer sur les valeurs respectives des trois indices principaux . On distinguera trois cas :

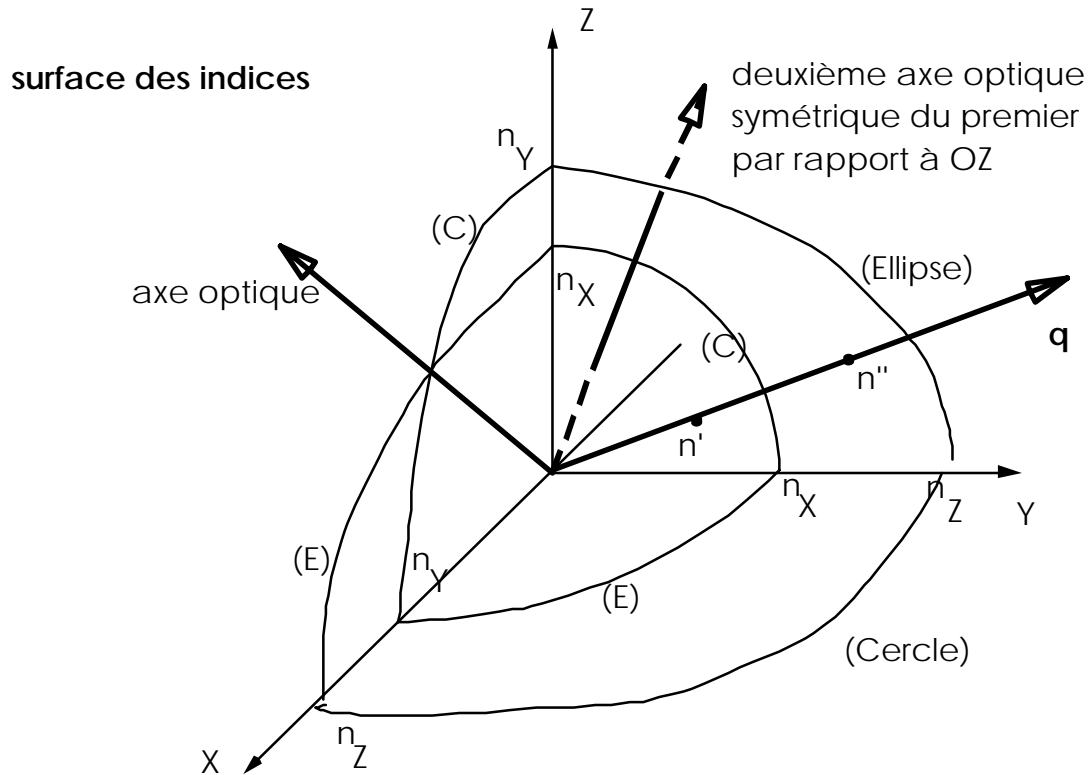
: si ces trois indices sont égaux , le cristal est isotrope ; c'est ce que l'on a examiné dans les paragraphes précédents ; le tenseur de constante diélectrique est diagonal ; \mathbf{D} et \mathbf{E} sont toujours parallèles ; pour une direction de propagation donnée il existe deux modes orthogonaux de même vitesse de phase ; au cours de la propagation la polarisation d'une onde ne change pas ; vitesse de phase et vitesse d'énergie sont parallèles .

: si deux de ces indices sont égaux , on aura un cristal dit « uniaxe » au sens des opticiens ; du point de vue cristallographique cela correspond aux groupes hexagonal tétragonal et trigonal . En raison de l'importance de ce groupe de cristaux pour les opticiens on y consacrerá un paragraphe spécial .

: si les trois indices sont différents on a un cristal « bi-axe » .

La bonne habitude veut que pour illustrer les conditions de propagation d'une onde optique dans un cristal on trace la « surface des indices » . Elle correspond à une représentation géométrique de l'équation aux indices : on porte à partir d'une origine arbitraire et suivant une direction normale aux plans d'onde (parallèlement aux vecteurs d'onde) des longueurs proportionnelles aux deux indices ; les axes de coordonnées sont choisis parallèlement

aux axes principaux . C'est en général une surface à deux nappes (deux indices distincts dans une direction quelconque) ; un minimum de calcul montre qu'elle a l'allure suivante :



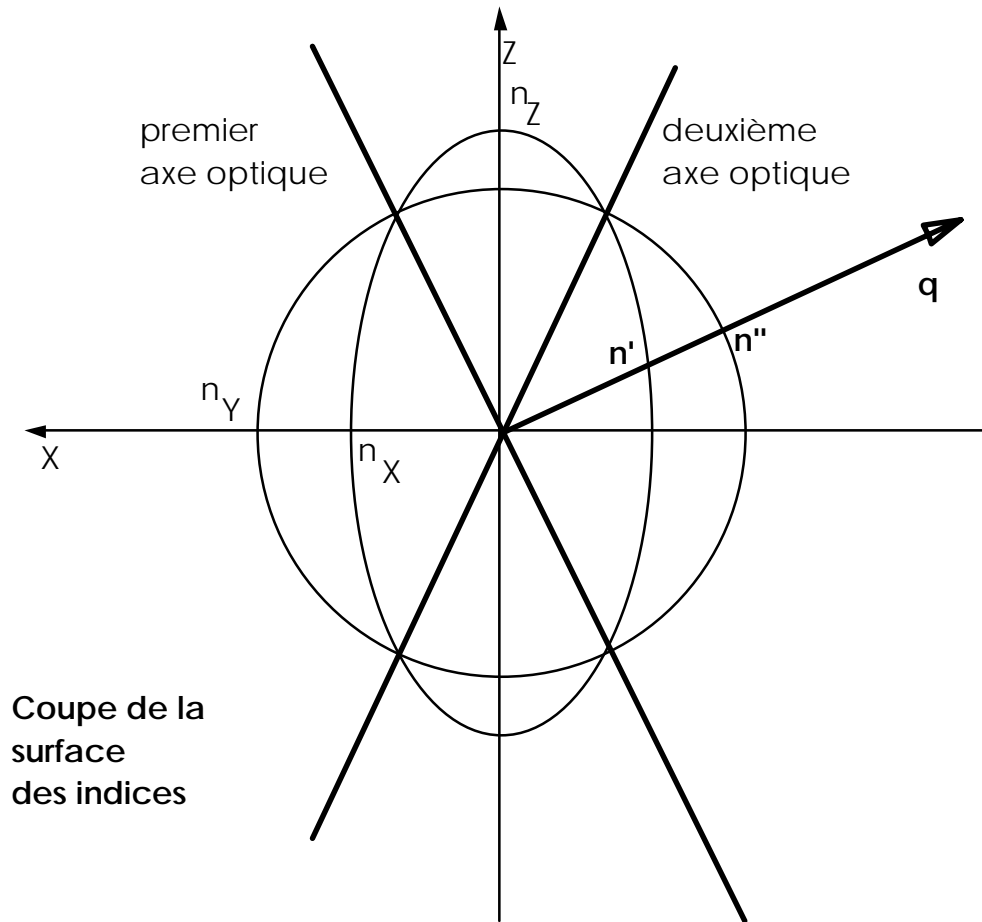
la surface intersecte chaque plan XOY , YOZ , ZOZ suivant une ellipse et un cercle ; cercle et ellipse dans le plan XOZ se coupent en quatre points (voir figure ci dessous) ; ils définissent deux axes dits « axes optiques » pour lesquels les vitesses de propagation sont identiques .

Dans la suite on appellera \mathbf{n} un vecteur parallèle à \mathbf{q} dont le module est égal à la valeur de l'indice optique dans la direction \mathbf{q} ; la surface des indices est donc engendrée par les extrémités du vecteur \mathbf{n} ; on appellera \mathbf{s} un vecteur parallèle au vecteur de Poynting $\mathbf{R} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ associé à chaque onde et tel que son module satisfasse :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 1$$

\mathbf{s} engendre aussi une surface à deux nappes dont on verra ultérieurement l'intérêt ; \mathbf{s} et \mathbf{n} n'ont aucune raison d'être parallèles l'un à l'autre .

A ce stade la question se pose de connaître les polarisations des ondes attachées à chaque nappe de la surface des indices ; cette question est traitée dans le paragraphe suivant pour le cas plus simple où les deux axes optiques sont confondus : « cristaux uniaxes » .



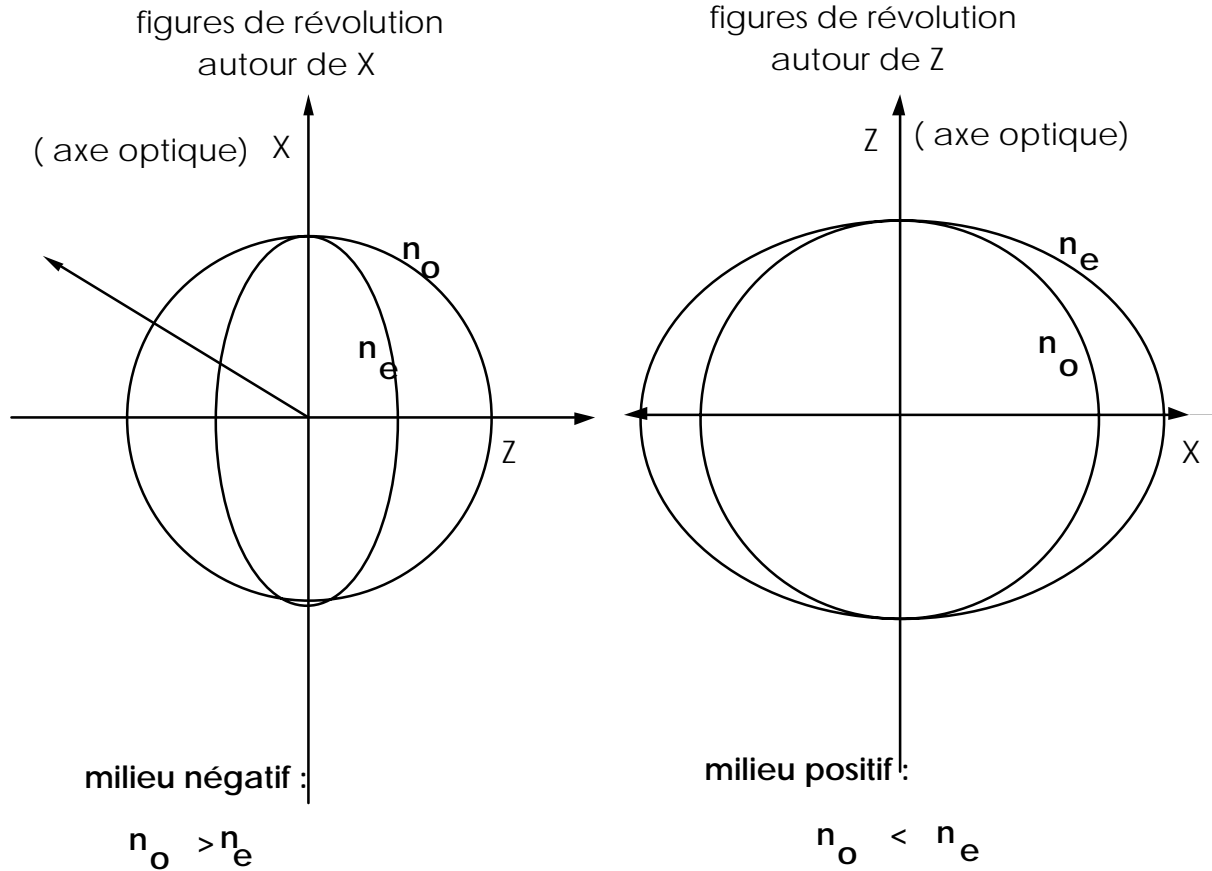
Cas des cristaux uniaxes

= Classification

On appelle « cristal uniaxe », au sens de l'optique, un cristal pour lequel deux des indices principaux sont égaux.

; si $n_X = n_Y < n_Z$ la surface des indices est invariante par rotation autour de Z ; elle se décompose en une sphère de rayon $n_o = n_X = n_Y$ (« indice ordinaire ») et un ellipsoïde de grand axe $n_e = n_Z$ (« indice extraordinaire ») et de petit axe $n_o = n_X = n_Y$; on a un « uniaxe positif »

; si $n_e = n_X < n_Y = n_Z = n_o$ la surface des indices est invariante par rotation autour de X ; l'ellipsoïde est inscrit à l'intérieur de la sphère ; on a un « uniaxe négatif »



= caractéristiques de la propagation d'une onde optique

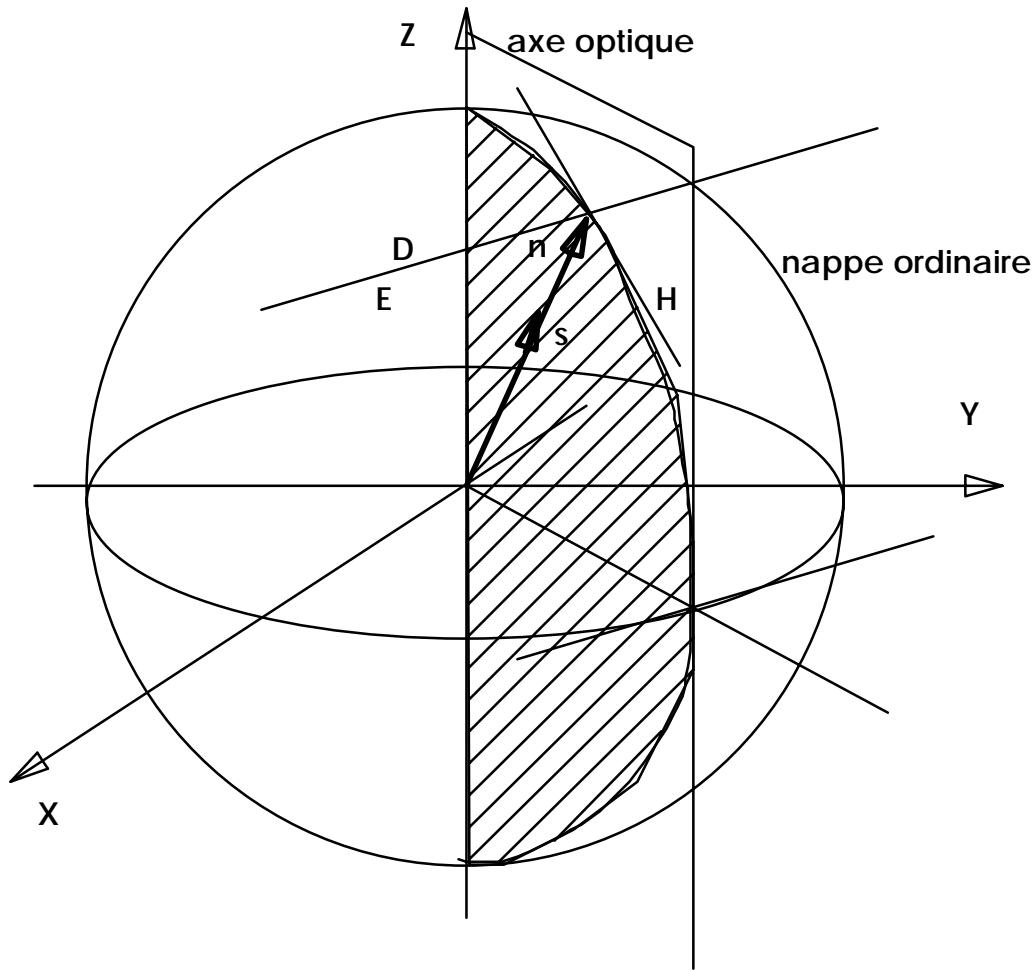
- « L'onde ordinaire », qui se propage avec l'indice ordinaire, a toutes les caractéristiques d'une onde dans un milieu isotrope : rayon parallèle au vecteur d'onde ; vitesse identique dans toutes les directions ; \mathbf{D} et \mathbf{E} sont colinéaires et tangents à la surface des indices. En effet, pour caractériser complètement l'orientation de \mathbf{E} on revient aux trois équations du paragraphe précédent :

$$D_J = \epsilon_J E_J = \epsilon_0 n^2 [E_J - (\mathbf{q})_J^0 ((\mathbf{q})^0 \cdot \mathbf{E})]$$

si l'on décline ces équations suivant les trois axes principaux on a, pour un uniaxe positif, un système d'équations très « lisible » :

$$(\mathbf{q})_X^0 ((\mathbf{q})^0 \cdot \mathbf{E}) = \left(1 - \frac{n_X^2}{n_o^2}\right) E_X \quad \dots(Y) \quad \dots(Z)$$

or comme $n_X = n_Y = n_o$ l'équation en Z oblige à prendre $E_Z = 0$; ainsi l'onde ordinaire est-elle polarisée perpendiculairement à l'axe optique ; même résultat pour un uniaxe négatif.



rayon ordinaire : q , n , et s
sont parallèles

D et E sont parallèles et
perpendiculaires au plan
contenant n et l'axe optique

- examen de « l'onde extraordinaire » (uniaxe positif)

Les calculs à effectuer sont plus compliqués ; ils sont cependant reproduits ici en utilisant une méthode assez économe en équations ; le résultat important est donné dans la figure ci dessous .

Tout part des équations de Maxwell relative à une onde plane dans un cristal :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q} \times \mathbf{H} &= -\omega \mathbf{D} & \text{ou encore} & & \mathbf{n} \times \mathbf{H} &= -c \mathbf{D} & & \mathbf{D} \cdot \mathbf{q} = 0 \\
 \mathbf{q} \times \mathbf{E} &= \omega \mu_0 \mathbf{H} & \text{ou encore} & & \varepsilon_0 c \mathbf{n} \times \mathbf{E} &= \mathbf{H} & & \mathbf{H} \cdot \mathbf{q} = 0 \\
 \mathbf{R} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = & & & & & &
 \end{aligned}$$

équations auxquelles on ajoute les définitions :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 1 \quad \mathbf{R}/s$$

$$\mathbf{q} = q \mathbf{u} \quad ; \quad \mathbf{u} \text{ est le vecteur unitaire orienté suivant } \mathbf{q} :$$

$$\mathbf{n} = n \mathbf{u}$$

$$\mathbf{s} \times \mathbf{H} = -\varepsilon_0 c \mathbf{E}$$

$$\mathbf{s} \times \mathbf{D} = -\frac{1}{c} \mathbf{s} \times \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{H}$$

On en tire aisément deux équations donnant \mathbf{D} et \mathbf{R} en fonction de \mathbf{E} et de l'indice \mathbf{n} (indice extraordinaire dont la valeur dépend de l'orientation de \mathbf{u}) et par un calcul analogue deux équations donnant \mathbf{E} et \mathbf{R} en fonction de \mathbf{D} et de \mathbf{s} ; en effet :

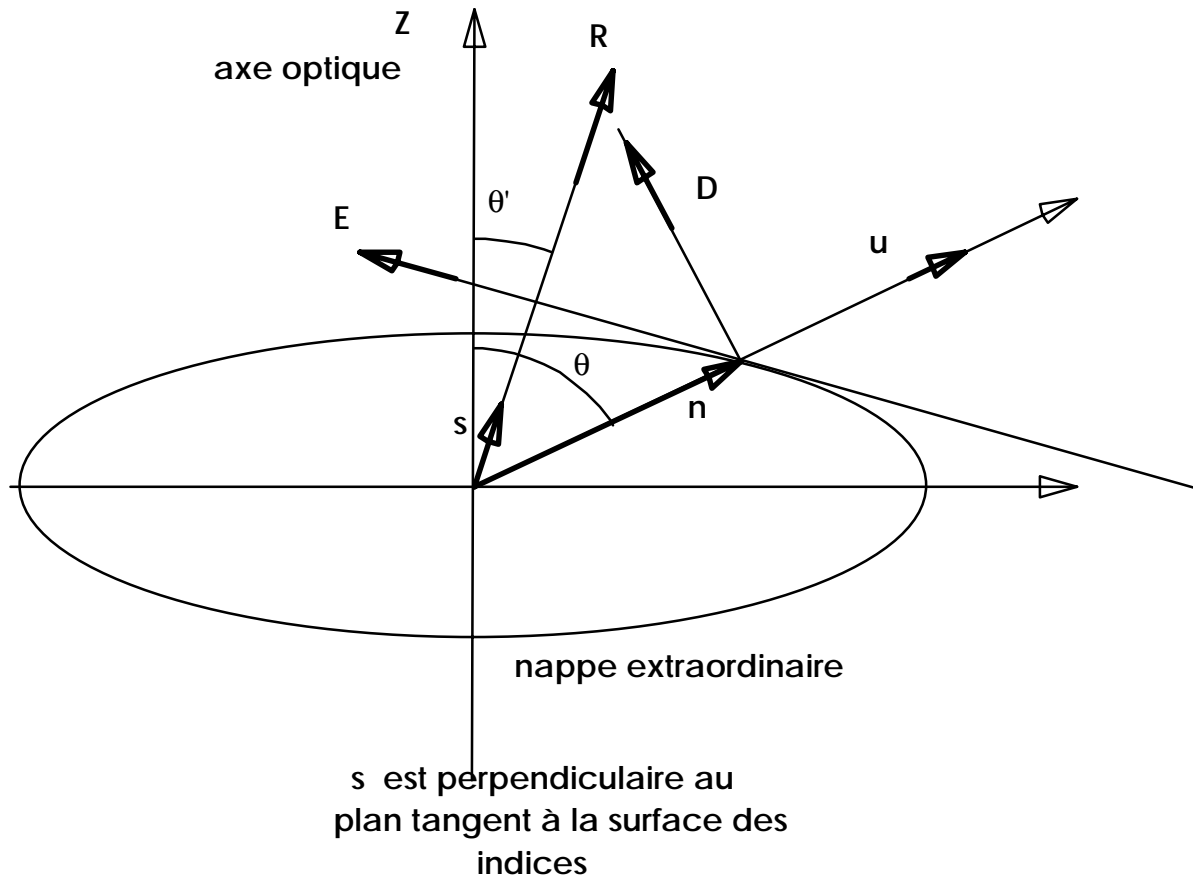
$$\mathbf{D} = -\left(\frac{q}{\omega}\right)^2 \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{u} \times \mathbf{u} \times \mathbf{E}) = -\frac{n^2}{\mu_0 c^2} (\mathbf{u} \times \mathbf{u} \times \mathbf{E}) = +n^2 \varepsilon_0 [\mathbf{E} - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})]$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \times \mathbf{u} \times \mathbf{E} \frac{q}{\omega \mu_0} = -\frac{n}{c \mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{E} \times \mathbf{u} = \frac{n}{c \mu_0} [\mathbf{u} E^2 - \mathbf{E}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})] = \varepsilon_0 c [\mathbf{n} - \mathbf{E}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})]$$

d'autre part :

$$-\mathbf{s} \times \mathbf{s} \times \mathbf{D} = -\frac{1}{c} \mathbf{s} \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = s^2 \mathbf{D} - \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{D})$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = c \mathbf{E} \times \mathbf{s} \times \mathbf{D} = \frac{c}{\varepsilon_0} \mathbf{s} [s^2 \mathbf{D}^2 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{D})^2]$$



Cela étant en différentiant $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = -c \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{n} \times d\mathbf{H} + d\mathbf{n} \times \mathbf{H} = -c \delta\mathbf{D}$
de même : $\epsilon_0 c \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{H} \rightarrow \epsilon_0 c (\mathbf{n} \times d\mathbf{E} + d\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = -\delta\mathbf{H}$

En multipliant la première équation par \mathbf{E} , la seconde par \mathbf{H} et en additionnant on trouve alors que

$$\delta\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0$$

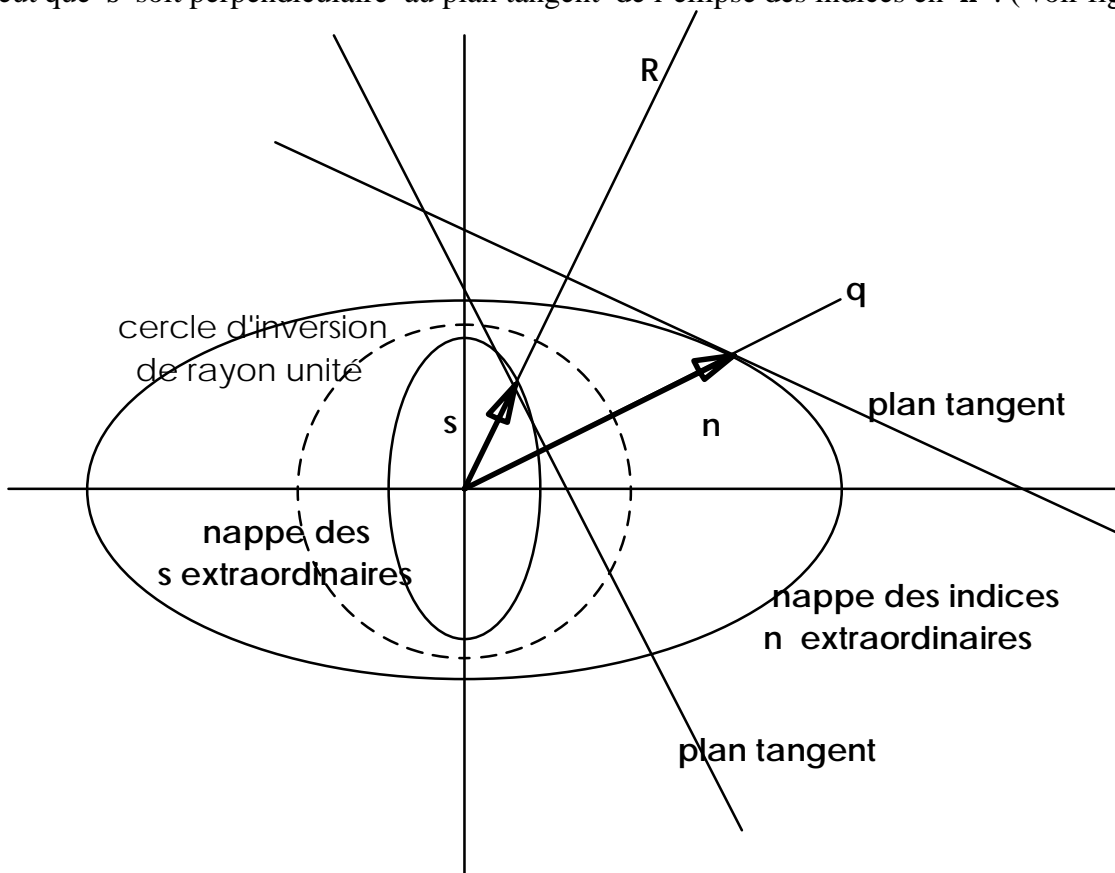
Comme $\delta\mathbf{n}$ est parallèle au plan tangent à la surface des indices, \mathbf{R} ou \mathbf{s} sont perpendiculaires à ce plan ; on a ainsi un procédé géométrique de passer de l'orientation du vecteur d'onde à celle du rayon lumineux. Dans ces conditions les angles de \mathbf{n} et de \mathbf{s} avec l'axe optique sont reliés par :

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{n_o^2}{n_e^2} \operatorname{tg} \theta$$

Avec un peu de géométrie analytique on montre que le lieu de l'extrémité du vecteur \mathbf{s} de l'onde extraordinaire est une ellipse d'équation :

$$s_x^2 n_e^2 + s_y^2 n_o^2 = 1$$

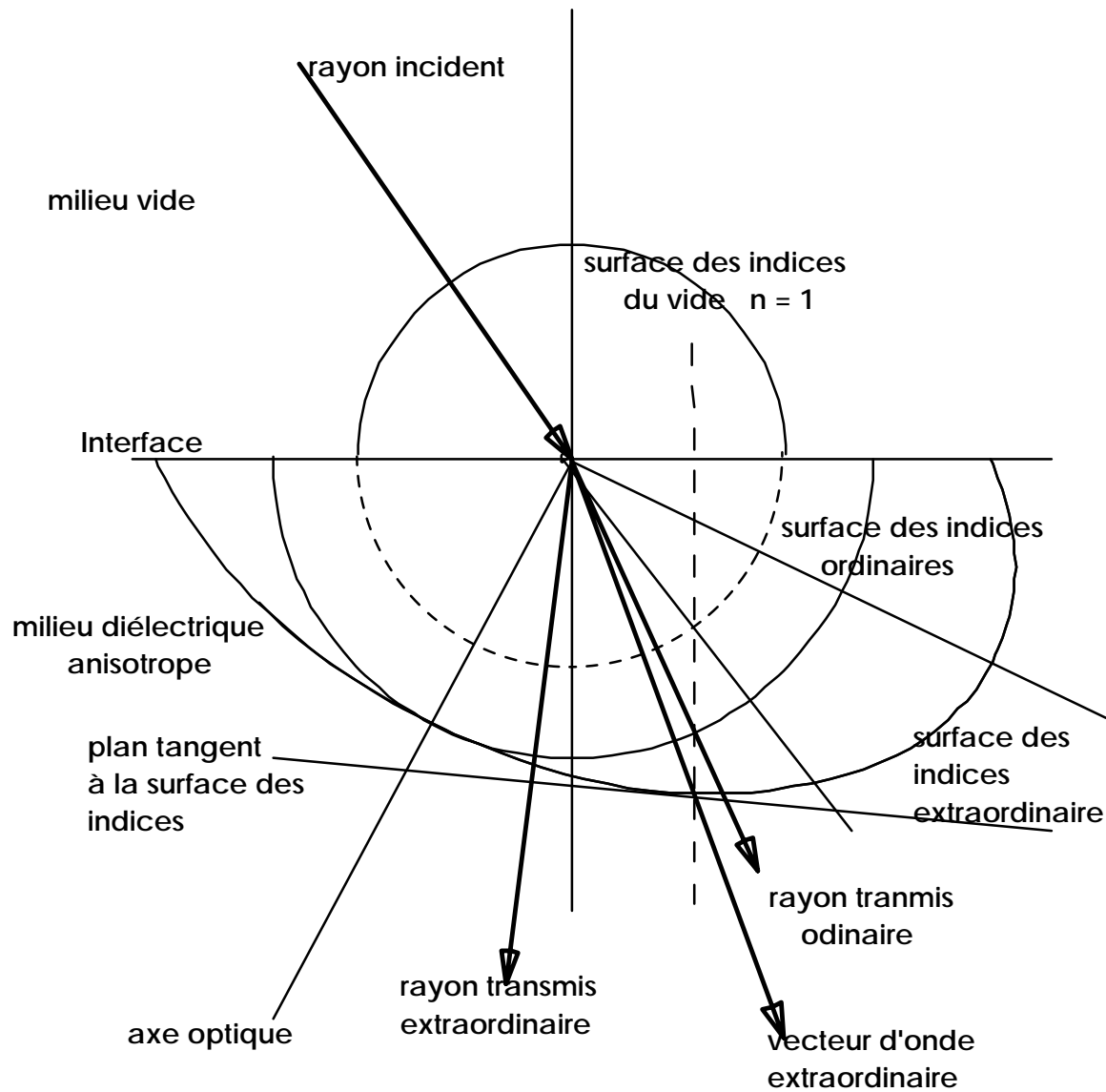
Le plan tangent à cette ellipse en \mathbf{s} est perpendiculaire à \mathbf{u} ; c'est la même propriété qui veut que \mathbf{s} soit perpendiculaire au plan tangent de l'ellipse des indices en \mathbf{n} . (voir figure)



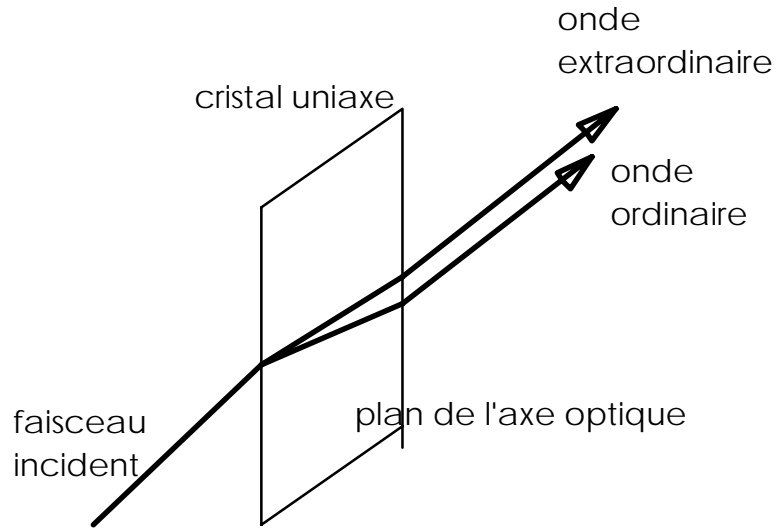
= applications des uniaxes

- transmission optique dans uniaxe

Le problème est : comment une onde incidente issue du vide se réfracte-t-elle lorsque le diélectrique est un uniaxe dont l'axe optique fait un angle quelconque avec l'interface . Les mêmes principes qui guidaient le cas isotrope sont valables ; tout au moins pour ce qui est de la conservation de la composante tangente du vecteur d'onde ; **d'où la construction ci dessous qui détermine de manière univoque la direction du vecteur d'onde ordinaire et extraordinaire .**



Cela étant , les propriétés des ellipsoïdes en n et en s permettent de donner l'orientation du rayon lumineux : le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire sont séparés .
 C'est intéressant car cela donne un moyen à partir d'un seul faisceau incident de séparer géométriquement deux ondes de polarisations orthogonales .



- prisme de Nicol

Il s'agit d'un morceau de calcite coupé en deux parties identiques et recollé avec une colle dont l'indice optique est compris entre l'indice extraordinaire et l'indice ordinaire ; ainsi l'un des deux rayons connaît une réflexion totale et on l'absorbe ultérieurement , alors que l'autre est transmis ; on peut ainsi obtenir un faisceau polarisé rectilignement dont la direction est donnée par la géométrie du cristal .

