Licence A, 2000/2001, 2^d semestre

ELECTROMAGNETISME ET OPTIQUE

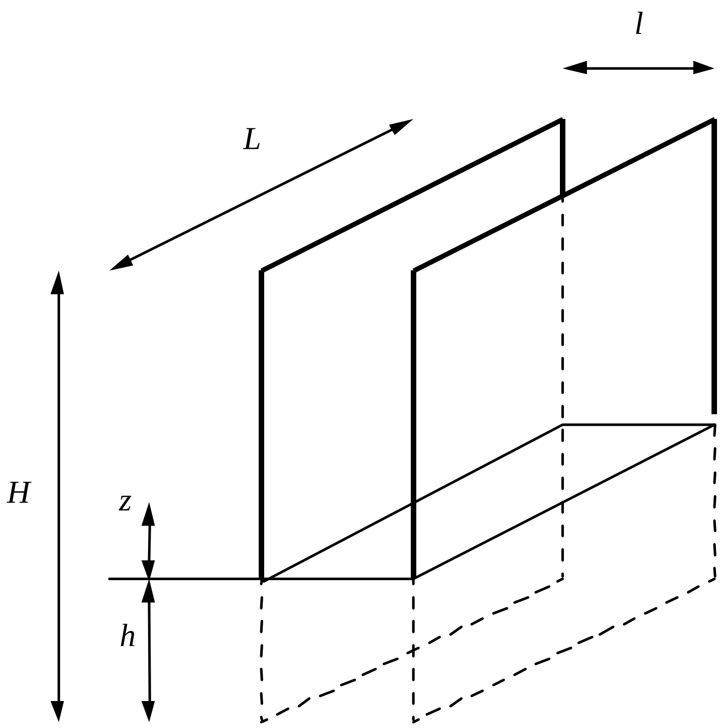
Contrôle Continu : devoir à rendre

Ce devoir est à rendre impérativement avant le 30 mars 2001.

Il comporte deux problèmes indépendants : rendre 2 copies séparées

Problème 1 : thermodynamique d'un liquide diélectrique

La solution de ce problème, qui ne comporte pas de calculs algébriques compliqués, nécessite en revanche une bonne compréhension de la thermodynamique des diélectriques. Ce problème vise à exprimer l'augmentation de hauteur d'un liquide isolant placé entre deux électrodes lorsque l'on augmente progressivement la tension aux bornes du condensateur de 0 à $V_{\max}$ (à température constante).



Le dispositif qui permet cette expérience est le suivant : dans une grande cuve pleine d'un liquide de constante diélectrique ε et de masse volumique ρ on plonge deux électrodes, perpendiculairement à la surface libre jusqu'à une profondeur h ; les dimensions des électrodes sont : hauteur totale H, distance entre électrodes l, largeur L. C'est l'état initial en l'absence de tension appliquée entre les électrodes ; on le note « état I ».

Dans la suite du problème, le volume de liquide compris entre les deux électrodes est très petit devant le volume de la cuve de sorte que l'on admettra que si le liquide monte ou descend dans le seul espace entre les électrodes, à l'extérieur du condensateur le niveau du liquide reste constant.

1. a) Redémontrer complètement quelles sont, en général, les équations qui régissent les grandeurs **E** et **D** à l'interface de deux diélectriques.

b) Compte tenu de la symétrie de distribution des champs dans ce problème, on appliquera ces résultats en spécifiant les relations entre les vecteurs **E** et **D** dans la partie du condensateur où il n'y a pas de liquide et celle où il y a du liquide lorsque l'on applique une tension V entre les électrodes.

2. La première expérience consiste à augmenter progressivement, de façon quasi-statique, la valeur de la tension appliquée aux bornes du condensateur, la surface du liquide étant libre de se déplacer. On ne procède donc ni à une expérience à potentiel constant, ni à une expérience à charge constante.

Pour arriver à la solution on va calculer diverses grandeurs (la charge totale Q des électrodes, l'énergie électrostatique du condensateur,…) comme si V et z étaient deux paramètres indépendants ; puis on cherchera la relation qui lie obligatoirement V et z, et, cette relation établie, on calculera toutes les grandeurs intéressantes comme : l'énergie dépensée par la pile, l'énergie de gravitation du liquide, l'énergie électrostatique…

La valeur de z sera reliée à V par la condition physique que la surface libre est en équilibre sous l'influence de deux forces : gravitation et force d'attraction électrostatique du liquide, ou ce qui revient au même, que l'énergie fournie par la pile est identique à celle gagnée par le liquide (*gravitation* + *électrostatique*).

La transformation consiste en une suite d'états d'équilibre qui vont de l'état initial, noté « état I » à l'état final, noté « état F » ; F est déterminé par $V_{\max}$. La suite des questions suivantes permettra aux étudiants d'arriver à la solution du problème.

a) Etablir les relations qui donnent D, E, Q et leurs différentielles en fonction de V et z comme s'il s'agissait de grandeurs indépendantes.

b) Exprimer l'énergie électrostatique totale $U_{el.st}(V,z)$ de l'ensemble « *liquide diélectrique* + *condensateur* » et sa différentielle en fonction de V et z.

c) Exprimer l'énergie potentielle de gravitation du liquide $U_{grav}(z)$ et sa différentielle.

d) Exprimer la différentielle du travail total $W_{piles}(V,z)$ fourni par la pile pour arriver à un état caractérisé par V et z.

e) En identifiant les différentielles qui donnent la variation d'énergie totale (*électrostat* + *grav*) et le travail des piles, déduire la relation qui lie V et z à chaque étape de la transformation de I vers F et montrer que le liquide est attiré dans le condensateur ; pourquoi a-t-on pu faire cette identification ?

3. Comme on l'a bien remarqué, dans la question 2), la transformation de I en F est différente de celles que l'on a décrites dans le cours pour évaluer l'énergie libre du diélectrique où l'on procédait soit à tension constante soit à charge constante ; on va maintenant essayer de se ramener à ce schéma et de caractériser les différences entre les processus des questions 2) et 3).

Pour aller de l'état I à l'état F on imagine ici de passer par un état intermédiaire M tel que : de I à M on maintient le niveau du liquide en z=0 mais on augmente la tension aux bornes du condensateur jusqu'à $V_{\max}$. Puis, pour aller de M à F, on maintient la tension à sa valeur $V_{\max}$ en laissant le liquide évoluer de façon quasi-statique jusqu'à sa position d'équilibre $z_{\max}$; on aboutit à l'état F. On se propose d'examiner comment se répartit l'énergie totale fournie par la pile, $W'_{piles}(z_{\max})$, pour aller de I à F en passant par M.

a) Pourquoi, en allant de I à F dans la question 2), on ne passe pas par l'état M ?

b) Calculer l'énergie électrostatique du condensateur dans l'état M et l'énergie fournie par la pile quand on va de I à M.

c) On va maintenant de M à F à tension constante ;

- calculer l'énergie fournie par la pile ;
- calculer la variation d'énergie électrostatique du liquide au cours de cette transformation ;
- calculer $U_{grav}(z_{\max})$;
- comparer $W'_{piles}(z_{\max})$ dans la transformation I→M→F et $W_{piles}(z_{\max})$ dans la transformation I→F ; d'où vient la différence ? Montrer qu'il y a eu échange de travail avec l'extérieur et donc diminution de l'énergie libre du diélectrique dans l'opération M→F ;
- discuter les points de vue des questions 2) et 3).

4. Valeurs numériques : masse spécifique du liquide : $\rho = 2\,\mathrm{g/cm^3}$; $V_{\max} = 1000$ Volts ; $\varepsilon = 2\varepsilon_0$; accélération de la pesanteur : g=10 $\mathrm{m/s^2}$; L=1 cm ; l=1 cm ; H=2 cm ; h=1 cm.

On calculera la valeur numérique de $z_{\max}$ et les valeurs des différentes énergies de la question 3) ; de votre point de vue, est-ce un gros ou un petit effet ? Que suggérez-vous comme expérience qui permettrait de mesurer $z_{\max}$ avec précision ?

Problème 2 : Réponse optique d'une petite sphère métallique dans un diélectrique

Dans ce problème, on se propose de calculer par un modèle simple la fonction diélectrique d'un métal quasi-parfait. On utilisera ensuite ce résultat dans le cas d'une sphère métallique dans un diélectrique transparent. Enfin, on examinera l'effet des électrons liés sur la réponse optique de la sphère.

1. Modèle de Drude pour les métaux simples

On considère un métal (conducteur quasi-parfait) dans lequel les électrons de conduction sont quasi-libres. On supposera dans la suite que le déplacement des électrons reste confiné dans un volume tel que les quantités auxquelles on s'intéresse (densité électronique, champ électrique, polarisation, déplacement…) ne dépendent pas de la position de l'électron dans ce volume. La charge d'un électron est $-e$, sa masse dans le solide est m_e (masse effective). Ils est soumis à des processus de collisions (avec les ions, les autres électrons, les défauts cristallins,…) caractérisés par un coefficient Γ. Il y a n_e électrons libre par unité de volume. On étudie l'interaction d'une onde électromagnétique avec ce métal. Le champ total vu par un électron est de la forme : $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathrm{E}e^{-i\omega t}\,\mathbf{e}_x$. Par une méthode semblable à celle utilisée en TD, déterminez successivement :

a) l'équation différentielle à laquelle obéit le déplacement d'un électron libre par rapport à sa position d'équilibre ;

b) la solution de cette équation ;

c) la polarisation $\mathbf{P}(\omega)$ associée à ce déplacement électronique (on ne retiendra que le terme dipolaire électrique : c'est *l'approximation dipolaire*) ;

d) et enfin la fonction diélectrique relative que l'on notera $\varepsilon(\omega)$ dans la suite. On appelle $\omega_p = \sqrt{\dfrac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}$ la pulsation de plasmon de volume du métal. Si on écrit ε sous la forme : $\varepsilon(\omega)=\varepsilon_1(\omega)+i\varepsilon_2(\omega)$, explicitez les parties réelle $\varepsilon_1(\omega)$ et imaginaire $\varepsilon_2(\omega)$.

e) Dans le cas où les processus de collisions sont faibles ($\Gamma \quad \omega$), ce qui est en général vrai dans la gamme des fréquences optiques, à quoi se réduisent ces expressions ?

f) En écrivant l'indice complexe $\tilde{n}=n+ik$, décrivez qualitativement la propagation de l'onde dans le métal lorsque $\omega \quad \omega_p$, puis lorsque $\omega=\omega_p$.

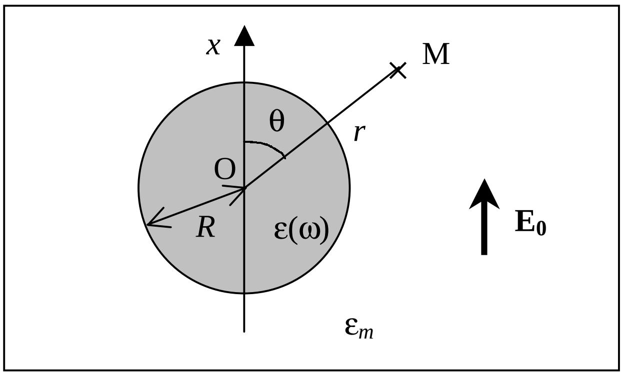
g) Application numérique : déterminez la valeur de la densité d'électrons de conduction n_e pour l'argent massif, puis celle de l'énergie de plasmon de volume théorique de l'argent $\hbar\omega_p$ <u>en eV</u>, sachant que :

- chaque atome d'argent "apporte" un seul électron de conduction (structure de l'atome : [Kr] $4d^{10}\,5s^1$) ;

- la masse volumique de l'argent massif est de 10490 kg/m^3 ;
- la masse molaire de l'argent (masse atomique) vaut 107.868 g/mole ;
- la masse effective d'un électron de conduction dans le solide vaut m_e=9.4 10^{-31} kg.

Rappel : nombre d'Avogadro N_A=6.02 10^{23}, ε_0=8.84 10^{-12} (S.I.), e=1.6 10^{-19} C et $\hbar$=1.05 10^{-34} J.s.

2. Champ électrique dans une sphère conductrice entourée de diélectrique



On considère une petite sphère métallique de rayon R plongée dans une matrice diélectrique transparente de permittivité relative (réelle) ε_m. On étudie l'interaction d'une onde électromagnétique avec ce système. On se place dans *l'approximation quasi-statique*, c'est-à-dire que la dimension de la sphère est suffisamment petite devant la longueur d'onde ($R \;\; \lambda$) pour qu'à chaque instant on puisse considérer que le champ est uniforme dans le métal : $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=E_0 e^{-i\omega t}\,\mathbf{e}_x$, ce qui revient à valider l'hypothèse faite au début de la section précédente ainsi que l'emploi de l'approximation dipolaire. On traitera le métal comme un diélectrique de fonction diélectrique (permittivité relative) $\varepsilon(\omega)$.

On se propose de calculer le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. Pour cela, on résout l'équation de Laplace pour le potentiel : $\Delta V=0$.

a) Ecrivez cette équation en coordonnées sphériques après examen des symétries du problème.

b) On admettra que les solutions s'écrivent, en un point M(r,θ) à l'extérieur ou à l'intérieur de la sphère :

$$\begin{cases} V_{ext}(r,\theta)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \\ V_{int}(r,\theta)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n r^n+\frac{D_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)\end{cases}$$

où A_n, B_n, C_n et D_n sont des coefficients réels (n entier) et les P_n sont les polynômes de Legendre dont les premiers sont donnés dans le tableau plus bas. Une condition aux limites est donnée par le fait que le champ électrique doit être défini au centre de la sphère ($\left.\dfrac{\partial V_{int}}{\partial r}\right|_{r=0}$ existe). Trouvez les trois autres conditions aux limites (potentiel à l'infini et passage à l'interface métal-diélectrique pour le vecteur **D** et le potentiel).

c) Déduisez alors les valeurs des coefficients A_n, B_n, C_n et D_n suivant la valeur de n, puis le potentiel V_{int} et V_{ext}.

d) Calculez ensuite le champ électrique à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère.

e) Donnez une condition sur la partie réelle ε_1 de ε pour que E_{int} soit maximum, dans le cas où $\varepsilon_2 \approx 0$. Lorsque cette condition est vérifiée, on a atteint la *résonance de plasmon de surface*. Expliquez physiquement l'origine de cette dénomination.

f) Dans le cas où le métal peut être décrit par le modèle de Drude avec $\Gamma \quad \omega$ (§1), explicitez la pulsation ω_s (pulsation de plasmon de surface) pour laquelle on obtient cette résonance. Déterminez alors la longueur d'onde de résonance théorique λ_s pour une petite sphère d'argent dans le vide puis dans la silice (n_m=1.45).

g) En fait, dans la plupart des métaux, les électrons des couches inférieures (électrons de cœur) contribuent également à la polarisation totale. Dans les métaux nobles, par exemple, l'effet des électrons de la couche *d* est responsable de la couleur de l'or et du cuivre massifs (absorption des transitions interbandes $d \rightarrow sp$ dont le seuil se situe dans le visible). Lorsque la longueur d'onde de résonance de plasmon de surface est supérieure à la longueur d'onde de ce seuil, l'influence des électrons de cœur ne se manifeste que dans l'ajout d'un terme supplémentaire dans l'expression de la partie réelle ε_1 de ε. C'est le cas pour les métaux alcalins (Li, Na, K…) ainsi que pour l'argent. Dans ce dernier cas, on peut écrire : $\varepsilon_1(\omega)=\varepsilon_1^{sp}(\omega)+\chi_1^{d}(\omega)$, où ε_1^{sp} désigne la contribution des électrons *sp* de conduction (modèle de Drude précédent) et $\chi_1^{d}=\varepsilon_1^{d}-1$ la susceptibilité diélectrique relative due aux électrons de cœur (principalement des électrons de la bande *d*). Donner alors la nouvelle expression de ω_s.

h) Sachant que, pour l'argent, $\varepsilon_1^{d} \approx 4.5$ dans la gamme spectrale qui nous intéresse, calculez la nouvelle valeur de la longueur d'onde de plasmon de surface λ_s pour une sphère d'argent dans le vide puis dans la silice. Comparez alors les résultats de ce modèle plus réaliste avec ceux obtenus avec le modèle simple précédent ne prenant en compte que les seuls électrons de conduction (question g). Donnez qualitativement une explication physique microscopique à cette influence des électrons de cœur.

Annexe : premiers polynômes de Legendre

n	$P_n(\cos\theta)$
0	1
1	$\cos\theta$
2	$3/2\cos^2\theta - 1/2$
3	$5/2\cos^3\theta - 3/2\cos\theta$