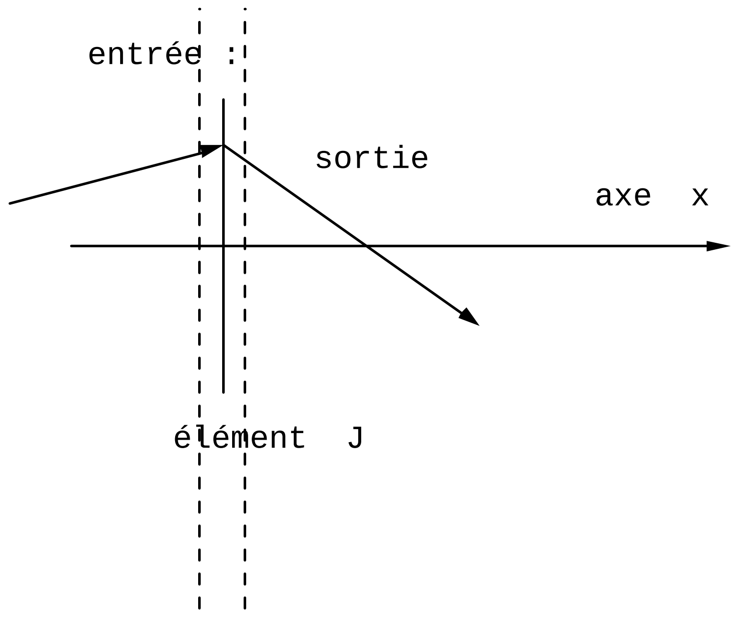
Ier exercice de cours ; chapitre 3

Dans un système optique centré , tout élément peut être représenté par une matrice 2x2 avec la convention suivante :



à l'entrée de l'élément J : pente du rayon et ordonnée du rayon : le « vecteur entrée J » représentatif est une matrice 2x1 :

$$E_J = \begin{pmatrix} z'_J \\ z_J \end{pmatrix}$$

à la sortie du même élément J : pente du rayon et ordonnée du rayon : le « vecteur sortie J» représentatif est une autre matrice 2x1 :

$$S_J = \begin{pmatrix} z'_J \\ z'_J \end{pmatrix}$$

Quand on exprime la « sortie » en fonction de l'« entrée » par une matrice de transfert , calculée avec les lois de l'optique géométrique , on obtient la « matrice de transfert J » d'un élément optique appartenant à un ensemble :

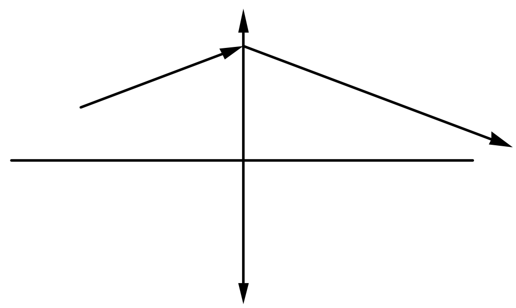
$$S_J = T_J \;\; E_J \quad ----> \quad \begin{pmatrix} z'_J \\ z'_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z'_J \\ z_J \end{pmatrix}$$

On distinguera les éléments « localisés » : un dioptre , une lentille mince , ...d'un élément non localisé : section droite de longueur L (entre deux lentilles par example) , fibre de verre de longueur L , ...

On donne ci dessous quelques examples de matrices de transfert .

- lentille mince de distance focale f :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

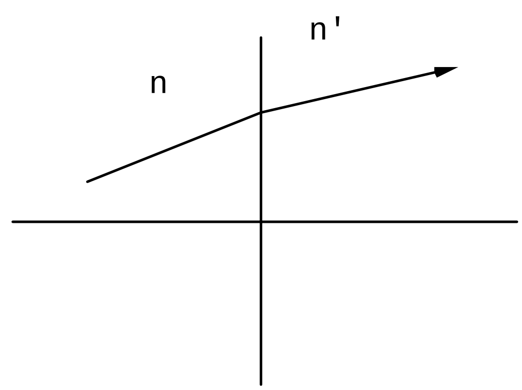


En effet pour une lentille convergente on a :

$$\frac{1}{\overline{\overline{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\overline{OA}}} = \frac{1}{f} \quad --> \quad \frac{z}{\overline{\overline{OA'}}} - \frac{z}{\overline{\overline{OA}}} = \frac{z}{f} \quad --> \quad -\acute{z}_s + \acute{z}_e = \frac{z}{f} \quad ; \text{ par ailleurs : } z_s = z_e$$

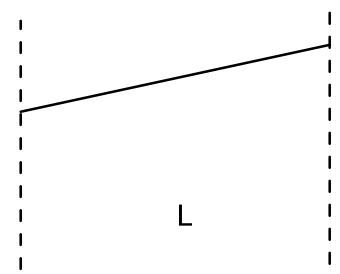
- dioptre plan par passage de l'indice n à l'indice n' :

$$\begin{pmatrix} \frac{n}{n'} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- élément de section droite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ L & 1 \end{pmatrix}$$



La matrice de transfert d'un appareil d'optique s'obtient en multipliant les matrices de transfert de chacun de ses éléments , dans le bon ordre .

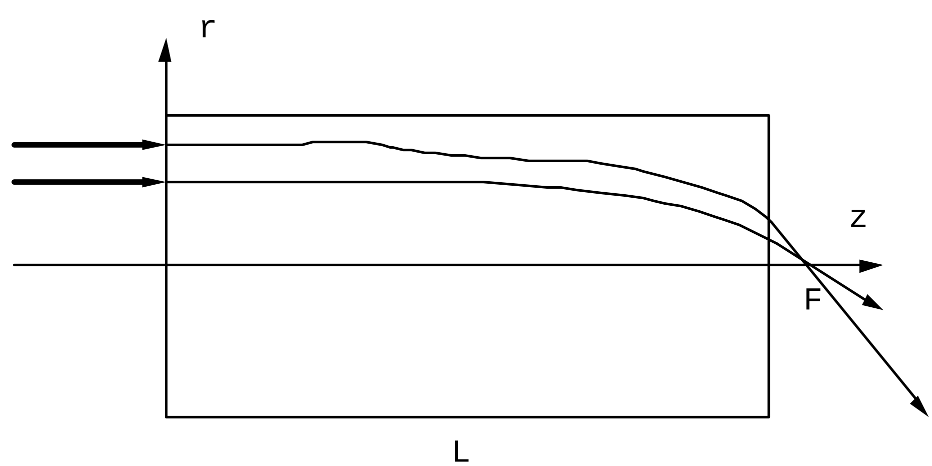
Deuxième exercice de cours ; chapitre 3

L'exercice porte sur l'équation de propagation d'un rayon lumineux dans un milieu inhomogène .

On considère une fibre de verre , d'axe z , de symétrie cylindrique , coupée à l'origine $z=0$ et à son extrémité $z=L$ par un plan vertical ; un faisceau lumineux tombe perpendiculairement à la face d'entrée et l'on demande de montrer que cette fibre ayant une longueur finie L , douée d' un indice $n(r)$ tel que :

$$n(r) = n_0 \left(1 - k^2 \frac{r^2}{2d^2}\right)$$

qui dépend de la seule distance r à l'axe , se comporte comme une lentille convergente : tous rayons issus de la face de sortie convergent en un même point F qui est donc le foyer de cet élément ; quelle est la matrice de transfert de cette fibre ?



Dans la plupart des cas (simples) on peut accepter que l'équation du rayon soit une fonction r (x) ; la pente du rayon par rapport à l'axe reste petite .
A partir de l'équation du rayon :

$$\frac{d}{dl}\left[\ n(r)\ \frac{d\mathbf{r}}{dl}\ \right] = \nabla n(r)$$

on part avec l'approximation :

$$\frac{d}{dz}\left[\ n(r)\ \frac{d\mathbf{r}}{dz}\ \right] = \frac{d}{dr}n(r) \quad --->\cong\ n_0\ \frac{d^2r}{dz^2} = -n_0k^2\ \frac{r}{d^2}$$

comme par hypothèse :

$$\frac{dr}{dz}\ \Big|_{z=0} = 0$$

la solution de l'équation différentielle est , pour un rayon qui touche la face d'entrée en r= r_0 :

$$r(z) = r_0\ \cos(\ k\frac{z}{d})$$

Le point de sortie est donc situé à la distance

$$r(L) = r_0\ \cos(\ k\frac{L}{d})$$

de l'axe de la fibre .

La pente de sortie pour ce rayon est , immédiatement à la sortie de la fibre et compte tenu de la réfraction à la face de sortie :

$$-n_0\ \ r_0\ \ \frac{k}{d}\sin(\ k\frac{L}{d})$$

Les angles étant petits , tous les rayons , quel que soit le point d'incidence , convergent en un même point de l'axe à une distance F :

$$F = \frac{1}{kn_0}\ d\ \ \cot g(\ k\frac{L}{d})$$

Ainsi suivant la longueur de la fibre on a une lentille convergente ou divergente .
La matrice de transfert de la fibre est donc :

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{kL}{d}) & -\frac{n_0k}{d}\sin(\frac{kL}{d}) \\ \frac{n_0k}{d}\sin(\frac{kL}{d}) & \cos(\frac{kL}{d}) \end{pmatrix}$$