Licence de Sciences et Technologies - Mention Physique - Année 2007/08

LP322 : Electromagnétisme dans la matière

Notes de cours

Intervenants :

Cours et responsable de l'UE : F. Ossart

TD : T. Briant, E. Mercier, F. Ossart

Notes de cours : JM. Courty

Table des matières

1 Les équations de Maxwell dans le vide

Ce chapitre vise à donner une vision générale des équations de Maxwell afin d'arriver le plus rapidement possible au coeur du cours : la propagation des ondes électromagnétiques et l'optique.

1.1 Enoncé des équations

Le socle de l'électromagnétisme repose sur cinq équations : les quatre équations de Maxwell et l'expression de la force de Lorentz.

Ces équations sont (sous leur forme locale)

L'équation de Maxwell Gauss

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.1}$$

L'équation de Maxwell flux magnétique

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0 \tag{1.2}$$

L'équation de Maxwell Faraday

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$

L'équation de Maxwell Ampère

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.4}$$

La force de Lorentz

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{1.5}$$

Ces équations portent le nom d'*équations de Maxwell dans le vide*. Cette dénomination est trompeuse car ces équations s'appliquent en présence de charges et de courant c'est à dire dans un vide qui contient de la matière, et donc qui n'est plus vide !. On les nomme ainsi par opposition aux *équations de Maxwell dans les milieux* que l'on étudiera au second semestre.

1.2 Charges, courants et champs

Charge électrique

Au niveau microscopique, les charges sont ponctuelles. Leur valeur est toujours un multiple entier de la charge élémentaire $e \simeq 1.6 \times 10^{-19} C$. Tout système physique est une collection de charges individuelles ponctuelles (même en mécanique quantique). Toutefois pour un système macroscopique, le nombre est tellement grand que l'on utilisera une description continue en terme de densité volumique de charge ρ.

Il est important de pouvoir passer de la description en terme de charges discrètes à une représentation continue. Pour faire le lien entre les expressions concernant des distributions continues de charge et les distribution discrètes, on étudie ce qui se passe dans un volume $\mathcal{V}$.

$$Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\left(\vec{r}\right) d^3\vec{r} = \sum_{i \in \mathcal{V}} q_i \tag{1.6}$$

On en déduit l'expression de la densité moyenne ρ_m dans un volume $\mathcal{V}$

$$\rho_m = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i \in \mathcal{V}} q_i \tag{1.7}$$

Exercice
A partir de quelle taille commence-t-on à avoir des problèmes à cause de la nature granulaire de la matière ? Donner la taille minimale acceptable du volume V pour de l'eau, de l'air.

le passage à la limite d'un très petit volume $\mathcal{V} \to 0$ conduit à la fonction $\rho\left(\vec{r}\right)$: la densité volumique de charge.

Courant électrique

Le courant I qui traverse une surface $\mathcal{S}$ est le flux du vecteur densité de courant $\vec{j}$:

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S}. \tag{1.8}$$

Une densité volumique de charge ρ animée d'une vitesse $\vec{v}$ produit une densité de courant $\vec{j}$ égale à :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \tag{1.9}$$

La densité de courant d'une distribution de charges ponctuelles q_i animées chacune d'une vitesse $\vec{v}_i$ est

$$\vec{j} = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i \in \mathcal{V}} q_i \vec{v}_i. \tag{1.10}$$

Conservation de la charge électrique

La charge électrique est une quantité qui se conserve. La variation temporelle de la charge située dans un volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface fermée $\mathcal{S}$ est le courant électrique qui traverse cette surface :

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_{\mathcal{V}} \rho d^3\vec{r}\right) = -\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}. \tag{1.11}$$

La relation locale exprimant la conservation de la charge est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0. \tag{1.12}$$

Champ électrique Champ magnétique

Le couplage entre la matière (charges et courants) et les champs électriques et magnétiques est déterminé par deux constantes fondamentales : μ_0 et ε_0.

Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N A^{-2} \tag{1.13}$$

Il s'agit d'une valeur exacte qui résulte de la définition de l'Ampère

Permittivité électrique du vide

$$\varepsilon_0 = 8.854187817... \cdot 10^{-12} F m^{-1} \tag{1.14}$$

Il s'agit aussi d'une valeur exacte depuis que le mètre est défini à partir de la vitesse de la lumière.

1.3 Contenu physique des équations de Maxwell

Chacune de ces équations prise individuellement décrit un effet physique. La forme intégrale des équations de Maxwell permet de reconnaitre facilement cet effet.

Equation de Maxwell Gauss

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.15}$$

Sous forme intégrale on reconnait le théorème de Gauss :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \tag{1.16}$$

$$Q = \iiint_V \rho \; d\tau. \tag{1.17}$$

Cette équation, est la même qu'en électrostatique. Elle permet de déterminer comment les charges électriques créent un champ électrique.

Maxwell flux magnétique

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Par analogie avec l'équation précédente on déduit que cette équation exprime qu'il n'existe pas de charge magnétique :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \tag{1.18}$$

Maxwell Ampère

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.19}$$

Sous forme intégrale il s'agit du théorème d'Ampère.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \tag{1.20}$$

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} \tag{1.21}$$

Lorsque le champ électrique est stationnaire, il n'y a que le terme $\mu_0 I$ et on reconnait le théorème d'Ampère de la magnétostatique. Dans le cas général, le second terme est appelé courant de déplacement.

Cette équation exprime la manière dont un courant électrique est à l'origine d'un champ magnétique. On remarquera qu'un champ électrique dépendant du temps crée lui aussi un champ magnétique.

Maxwell Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cette équation décrit le phénomène d'induction : un champ magnétique qui varie temporellement est à l'origine d'un champ électrique. Ce champ est dénommé champ électromoteur :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

1.4 Propriétés et conséquences des équations de Maxwell

Le théorème de superposition

Les équations de Maxwell sont des équations linéaires en $\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ et $\vec{j}$.

Cohérence des équations

Jusqu'à présent, nous avons considéré séparément les différentess équations de Maxwell. Chacune permet de rendre compte d'un effet physique : la création d'un champ électrique par les charges électriques, l'absence de charge magnétique, la création d'un champ magnétique par un courant électrique et le phénomène d'induction. Le génie de Maxwell a été de comprendre qu'il s'agit d'un tout et que ces équations doivent être considérées comme un ensemble. Prises ensembles plutôt qu'individuellement, ces équations contiennent beaucoup plus que ces phénomènes.

L'exemple le plus simple s'obtient en combinant Maxwell Ampère et Maxwell Gauss : on écrit Maxwell Ampère

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.22}$$

on prend la divergence

$$\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}\right) = \mu_0 \text{div}\vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \text{div}\vec{E}}{\partial t} \tag{1.23}$$

le premier terme est nul car la divergence d'un rotationnel est nulle. Le troisième terme peut se réécrire gràce à Maxwell Gauss. Au final :

$$\text{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.24}$$

On obtient l'équation qui rend compte de la conservation de la charge. Ainsi, cette propriété observée expérimentalement bien avant la théorie de l'électromagnétisme n'est pas à ajouter, elle est déjà contenue dans les équations de Maxwell.

Existence d'ondes électromagnétiques

En électrostatique, le champ électrique est dû à la présence de charges électriques : sans charge électrique, pas de champ électrique. En magnétostatique le champ magnétique est dû à la présence de courants électriques : sans courant électrique, pas de champ magnétique.

Lorsque l'on étudie des situations dynamiques oú les différentes grandeurs dépendent du temps, on peut écrire Maxwell Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.25}$$

Si le champ magnétique dépend du temps on peut avoir un champ électrique avec une densité de charge électrique ρ nulle. Il suffit qu'il y ait un courant électrique :

$\vec{j}$ dépend de $t \to \vec{B}$ dépend de $t \to \vec{E}$ dépend de t .

On peut encore avoir plus et imaginer l'existence d'un champ électrique et d'un champ magnétique en l'absence de charge et de courant.

Maxwell Faraday dit que $\vec{B}$ qui dépend du temps crée $\vec{E}$ (qui dépend donc aussi du temps) Et Maxwell Ampère dit que $\vec{E}$ qui dépend du temps crée $\vec{B}$. Le champ électromagnétique acquièrt une existence autonome par rapport aux charges. Il est bien sûr nécessaire d'avoir initialement des charges et des courants pour créer une onde électromagnétique, mais dès que celle ci est émise, son existence ne dépend plus de ces charges et courants.

2 Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

Dans tout ce chapitre, on se place en l'absence de charges et de courants.

2.1 Equation de propagation du champ électrique

Les équations de Maxwell couplent l'évolution du champ électrique et du champ magnétique. En les combinant on peut obtenir une équation d'évolution pour le champ électrique seul. Prenons la dérivée temporelle de Maxwell-Ampère :

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \tag{2.1}$$

Exprimons la dérivée temporelle de $\vec{B}$ à l'aide de Maxwell-Faraday

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E}\right) = -\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\ \vec{E}\right) - \Delta\vec{E}\right). \tag{2.2}$$

Enfin Maxwell Gauss nous dit qu'en l'absence de charge la divergence du champ électrique est nulle. L'équation d'évolution du champ électrique est une équation de d'Alembert qui décrit la propagation d'ondes :

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{2.3}$$

2.2 La propagation d'ondes scalaires

2.2.1 Propagation à une dimension

L'équation de propagtion à une dimension d'un champ scalaire φ est

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{2.4}$$

Les solutions de cette équation sont

$$\varphi\left(z,t\right) = f\left(z-ct\right) + g\left(z+ct\right). \tag{2.5}$$

Une méthode de résolution qui permet de s'assurer que l'on a bien toutes les solutions consiste à effectuer le changement de variables suivant

$$\psi(u,v) = \varphi(z,t), \tag{2.6}$$

$$u = z - ct, \tag{2.7}$$

$$v = z + ct. \tag{2.8}$$

La fonction ψ vérifie alors l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0 \tag{2.9}$$

2.2.2 Description des solutions

La solution f correspond à une onde qui se propage sans se déformer vers les z croissants. La solution g est une onde qui se propage vers les z décroissants.

2.2.3 Propagation à trois dimensions

A trois dimensions les solutions sont beaucoup plus compliquées qu'à une dimension. En particulier, il n'est pas possible de simplifier le problème à l'aide d'un changement de variables.

On peut toutefois trouver des solutions particulières qui vérifient certaines propriétés de symétrie.

Ondes planes progressives

Le champ ne dépend que d'une coordonnée. Il peut s'agir d'un axe, par exemple l'axe z

$$\Phi(x,y,z,t) = \varphi(z,t), \tag{2.10}$$

ou bien d'un axe quelconque de vecteur unitaire $\vec{u}$

$$\Phi(x,y,z,t) = \varphi(\vec{u} \cdot \vec{r}, t). \tag{2.11}$$

Le champ Φ est constant sur des plans orthogonaux à la direction de propagation $\vec{u}$.

Le champ $\varphi(z,t)$ vérifie l'équation de propagation à une dimension dont nous connaissons toutes les solutions. Si l'on choisit de ne conserver que les solutions qui vont dans la direction et le sens du vecteur unitaire $\vec{u}$, les solutions en onde plane s'écrivent

$$\Phi(x,y,z,t) = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct). \tag{2.12}$$

Ondes sphériques progressives

Le champ ne dépend que de la distance r du point considéré avec l'origine

$$\Phi(\vec{r},t) = \psi(r,t). \tag{2.13}$$

Pour une fonction qui ne dépend que de r le laplacien a une forme relativement simple :

$$\Delta\Phi\left(\vec{r},t\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\psi\left(r,t\right)\right). \tag{2.14}$$

La fonction ψ verifie l'équation d'évolution suivante

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\psi\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(r\psi\right)=0. \tag{2.15}$$

Par conséquent la fonction $r\psi$ vérifie l'équation de d'Alembert à une dimension dont nous connaissons les solutions. Nous en déduisons la solution en ondes sphériques :

$$\psi\left(r,t\right)=\frac{f\left(r-ct\right)}{r}+\frac{g\left(r-ct\right)}{r}. \tag{2.16}$$

Le premier terme (fonction f) corrspond à une onde qui s'éloigne de l'origine. Cette onde est appelée onde sortante. Le second correspond à une onde qui converge vers l'origine, il s'agit d'une onde entrante.

Solutions stationnaires

Le théorème de superposition permet de construire une nouvelle solution comme combinaison linéaire de deux solutions. L'espace des solutions est ainsi un espace vectoriel. Pour le connaitre, il suffit en fait de connaitre une base. Diverses méthodes permettent de trouver de telles bases. Celles ci reposent sur l'utilisation de la transformée de Fourier ou plus généralement de l'analyse harmonique. Il s'agit de trouver les solutions stationnaires.

2.3 Ondes électromagnétiques planes progressives

Retour sur la propagation du champ électrique

Les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide avec la célérité c :

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}. \tag{2.17}$$

$$=299\ 792\ 458\ m\ s^{-1} \tag{2.18}$$

Il s'agit d'une valeur exacte depuis la définition du mètre adoptée en 1983. La valeur de la perméabilité magnétique du vide μ_0 est aussi une valeur exacte car elle repose sur la définition de l'Ampère. Par conséquent, la valeur de la permittivité électrique du vide ε_0 est elle aussi exacte.

Les solutions en onde plane

Chacune des composantes du champ électrique et du champ magnétique vérifie l'équation de d'Alembert. Intéressons nous aux solutions particulières pour lesquelles toutes ces composantes sont des ondes planes progressives se dirigeant selon la direction et le sens d'un vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$\vec{E}\,(\vec{r},t) = \vec{e}\,(\vec{u}\cdot\vec{r} - ct)\,, \tag{2.19}$$

$$\vec{B}\,(\vec{r},t) = \vec{b}\,(\vec{u}\cdot\vec{r} - ct)\,. \tag{2.20}$$

Ce champ électromagnétique est solution de l'équation de d'Alembert. C'est une condition nécessaire pour être solution de l'équation de Maxwell, mais cette condition n'est pas suffisante. Il nous faut maintenant revenir aux équations de Maxwell pour finir le travail. Pour des ondes planes progressives, la dérivée temporelle, la divergence et le rotationnel prennent des formes particulièrent simples :

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\,(\vec{r},t) = -c\;\vec{e}\,'\,(\vec{u}\cdot\vec{r} - ct)\,, \tag{2.21}$$

$$\text{div }\vec{E}\,(\vec{r},t) = \vec{u}\cdot\vec{e}\,'\,(\vec{u}\cdot\vec{r} - ct)\,, \tag{2.22}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\;\vec{E}\,(\vec{r},t) = \vec{u}\times\vec{e}\,'\,(\vec{u}\cdot\vec{r} - ct)\,, \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\,(\vec{r},t) = -c\;\vec{b}\,'\,(\vec{u}\cdot\vec{r} - ct)\,, \tag{2.24}$$

$$\text{div }\vec{B}\,(\vec{r},t) = \vec{u}\cdot\vec{b}\,'\,(\vec{u}\cdot\vec{r} - ct)\,, \tag{2.25}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\;\vec{E}\,(\vec{r},t) = \vec{u}\times\vec{b}\,'\,(\vec{u}\cdot\vec{r} - ct) \tag{2.26}$$

Dans les intégrations, nous considérerons que les constantes d'intégration qui interviennent sont nulles (elles correspondent à un champ statique nul dans tout l'espace) autrement dit, il n'y a ni champ électrique statique, ni champ magnétique statique.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{div }\vec{E} = 0 & \rightarrow & \vec{u}\cdot\vec{e}\,' = 0 & \rightarrow & \vec{u}\cdot\vec{E} = 0 \\
\text{div }\vec{B} = 0 & \rightarrow & \vec{u}\cdot\vec{b}\,' = 0 & \rightarrow & \vec{u}\cdot\vec{B} = 0 \\
\overrightarrow{\text{rot}}\;\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \rightarrow & \vec{u}\times\vec{e}\,' = c\;\vec{b}' & \rightarrow & \vec{u}\times\vec{E} = c\;\vec{B} \\
\overrightarrow{\text{rot}}\;\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \rightarrow & \vec{u}\times\vec{b}\,' = -\frac{1}{c}\vec{e}\,' & \rightarrow & \vec{u}\times\vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{E}
\end{array} \tag{2.27}$$

Nous pouvons donc récapituler les propriétés du champ électrique et du champ magnétique pour une *onde plane progressive.*
` Attention, les remarques qui suivent ne sont valables que pour une ondes planes progressives qui se propage dans la direction $\vec{u}$.

- Le champ électrique et la champ magnétique sont orthogonaux à la direction de propagation. On dit que ce sont des champs transverses
- Le champ électrique et le champ magnétique sont orthogonaux entre eux.
- Le trièdre $\left(\vec{u},\vec{E},\vec{B}\right)$ formé de la direction de propagation, du champ électrique et du champ magnétioque est un trièdre direct.
- Le module du champ électrique est c fois plus grand que celui du champ magnétique

2.4 Onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée linéairement

2.4.1 Structure du champ électrique

Pour discuter précisément de la structure du champ électrique et du champ magnétique on considère une onde qui se propage dans la direction Oz vers les z croissants et dont le champ électrique est aligné selon Ox. ce qui correspond à l'expression "polarisée linéairement"

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}(z - ct) + \varphi_0\right)\vec{u}_x = E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi_0)\,\vec{u}_x \tag{2.28}$$

– Il s'agit d'un onde monochromatique dont la *pulsation* est ω.
– L'évolution du champ électrique est périodique de *période* T.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2.29}$$

– La dépendance spatiale est harmonique, elle est caractérisée par le *nombre d'onde* k .

$$k = \frac{\omega}{c} \tag{2.30}$$

– A un instant donné, la distribution du champ électrique est spatialement périodique. La période spatiale est la longueur d'onde λ.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{2.31}$$

L'onde plane se propage à la célérité c sans se déformer. Le champ électrique redevient égal à sa valeur initiale
- aprés s'etre propagé sur une distance égale à la longueur d'onde λ
- au bout d'une période temporelle T. C'est à dire après s'etre paropagé de cT.

On en déduit la relation entre longueur d'onde et période spatiale

$$\lambda = cT \tag{2.32}$$

En un point donnée le champ électrique oscille selon un segment de droite parallèle à $\vec{u}_x$. On dira que l'onde est polarisée linéairement selon l'axe Ox .

Plus généralement, on appelle polarisation l'évolution de la direction du champ électrique en fonction du temps en un point donné de l'espace.

Pour une onde électromagnétique plane monochromatique polarisée linéairement, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{z} - \omega t + \varphi_0\right)\vec{u} \tag{2.33}$$

Le vecteur $\vec{k}$ est le vecteur d'onde, il définit la direction de propagation de l'onde. Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur unitaire orthogonal à la direction de propagation, il définit la direction du champ électrique c'est à dire la polarisation de l'onde.

2.4.2 Champ magnétique

Le champ magnétique se déduit de l'équation de Maxwell Faraday

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.34}$$

$$\left|\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right. \times \left|\begin{array}{c} E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi_0) \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} 0 \\ -kE_0 \sin(kz - \omega t + \varphi_0) \\ 0 \end{array}\right. \tag{2.35}$$

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi_0)\, \vec{u}_y \tag{2.36}$$

3 Ondes monochromatiques

3.1 Ondes monochromatiques et notation complexe

3.1.1 Pourquoi s'intéresser aux ondes monochromatiques ?

Ce sont les multiples conséquences du fait que les équations de Maxwell sont des équations linéaires.

L'utilisation combinée de la transformation de Fourier et du théorème de superposition permet de décomposer toute onde électromagnétique en composantes de Fourier qui correspondent à des ondes monochromatiques.

Les modes propres du champ électromagnétique ont un évolution sinusoïdale.

La réponse du champ électromagnétique à une excitation sinusoidale est elle même sinusoidale.

3.1.2 La notation complexe

Toute grandeur sinusoidale $A\left(t\right)$ peut s'écrire sous la forme

$$A\left(t\right) = A_0 \cos\left(\varphi_0 - \omega t\right) \tag{3.1}$$

A_0 est l'amplitude de la grandeur A et φ_0 sa phase.

On associe à la grandeur physique $A\left(t\right)$ une grandeur complexe $\mathcal{A}\left(t\right)$ définie par

$$\mathcal{A}\left(t\right) = A_0 \; e^{i(\varphi_0 - \omega t)}. \tag{3.2}$$

La grandeur physique $A\left(t\right)$ est la partie réelle de la grandeur complexe $\mathcal{A}\left(t\right)$

$$A\left(t\right) = \Re\left(\mathcal{A}\left(t\right)\right). \tag{3.3}$$

On défini l'amplitude complexe $\mathcal{A}_0$ comme :

$$\mathcal{A}_0 = A_0 e^{i\varphi_0} \tag{3.4}$$

de sorte que

$$\mathcal{A}\left(t\right) = \mathcal{A}_0 \; e^{-i\omega t}. \tag{3.5}$$

Remarque 1

On dispose de deux choix pour définir la notation complexe car un cosinus est la somme de deux exponentielles conjuguées. On rencontre en pratique les deux choix possibles.

La convention dépend des traditions du domaine étudié. En électricité il est de coutume d'écrire

$$\mathcal{A}\left(t\right)=\mathcal{A}_{0}e^{i\omega t}. \tag{3.6}$$

En électromagnétisme on préfère souvent

$$\mathcal{A}\left(t\right)=\mathcal{A}_{0}\ e^{-i\omega t}. \tag{3.7}$$

C'est ce choix qui sera fait dans toute la suite du cours.

Remarque 2

Il est important de toujours se rappeler que la notation complexe est une convention. Pour éviter toute confusion, chaque fois que l'on utilise la notation complexe on écrira le passage complexe→réel et réel→complexe.

$$A\left(t\right)=A_{0}\cos\left(\varphi_{0}-\omega t\right) \tag{3.8}$$

$$\mathcal{A}\left(t\right)=A_{0}\ e^{i\left(\varphi_{0}-\omega t\right)} \tag{3.9}$$

La notion d'amplitude complexe est extrémement utile, que ce soit d'un point de vue pratique pour calculer ou d'un point de vue plus conceptuel pour comprendre les phénomènes. Toutefois, il est essentiel de ne pas oublier que les quantités physiques sont des grandeurs réelles.

Remarque 3

Il n'est pas toujours possible d'utiliser des lettres calligraphiques, par exemple quand on a des quantités décrites par des minuscules. On utilise alors souvent la notation suivante :

$$a\left(t\right)=a_{0}\ \cos\left(\varphi_{0}-\omega t\right) \tag{3.10}$$

$$\underline{a\left(t\right)}=a_{0}\ e^{i\left(\varphi_{0}-\omega t\right)} \tag{3.11}$$

$$\underline{a_{0}}=a_{0}\ e^{i\varphi_{0}} \tag{3.12}$$

$$a\left(t\right)=\Re\left(\underline{a\left(t\right)}\right) \tag{3.13}$$

Remarque 4

Pour une onde monochromatique, il est possible d'écrire l'amplitude complexe en fonction de l'amplitude réelle de la manière suivante :

$$\mathcal{A}\left(t\right)=A\left(t\right)+iA\left(t+\frac{T}{4}\right). \tag{3.14}$$

Par consequent, si la fonction $A\left(t\right)$ est solution d'une équation d'évolution linéaire indépendante du temps, l'amplitude complexe $\mathcal{A}\left(t\right)$ le sera aussi.

3.2 Onde électromagnétique monochromatique

Onde scalaire, onde vectorielle

L'amplitude d'une onde monochromatique scalaire s'écrit

$$A(\vec{r},t) = \Re\left(\mathcal{A}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\right) \tag{3.15}$$

ce qui correspond à la grandeur réelle

$$A(\vec{r},t) = A_0(\vec{r}) \cos\left(\varphi_0(\vec{r}) - \omega t\right)$$

$A_0(\vec{r})$ est l'amplitude de l'onde au point $\vec{r}$ et $\varphi_0(\vec{r})$ la phase de l'onde au point $\vec{r}$.

Les surfaces $\varphi_0(\vec{r}) = cste$ sont appelées surfaces d'onde. Lorsque ce sont des plans, on parle d'onde plane, lorsque ce sont des sphères, d'onde sphérique.

Pour un champ vectoriel comme le champ électrique, chacune des composantes peut s'écrire sous cette forme. Cela donne l'écriture compacte

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \Re\left(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\right). \tag{3.16}$$

Attention à ne pas se laisser emporter par la simplicité de cette écriture. Le champ réel s'écrit

$$E_x(\vec{r},t) = E_{0x}(\vec{r}) \cos\left(\varphi_x(\vec{r}) - \omega t\right) \tag{3.17}$$

$$E_y(\vec{r},t) = E_{0y}(\vec{r}) \cos\left(\varphi_y(\vec{r}) - \omega t\right) \tag{3.18}$$

$$E_z(\vec{r},t) = E_{0z}(\vec{r}) \cos\left(\varphi_z(\vec{r}) - \omega t\right) \tag{3.19}$$

Les phases $\varphi_x(\vec{r})$, $\varphi_y(\vec{r})$ et $\varphi_z(\vec{r})$ sont a priori différentes. C'est seulement lorsque ces phases sont égales que l'on peut écrire le champ électrique sous la forme suivante :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r},t) \cos\left(\varphi_0(\vec{r}) - \omega t\right). \tag{3.20}$$

Dans cette situation, la polarisation du champ électromagnétique est linéaire en chaque point de l'espace.

Equation d'onde

Pour une onde monochromatique $A(\vec{r},t)$, la dérivée temporelle est :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A(\vec{r},t) = -\omega^2 A(\vec{r},t) \tag{3.21}$$

Par conséquent l'équation de propagation devient

$$\Delta\mathcal{A}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}\mathcal{A}(\vec{r}) = 0 \tag{3.22}$$

Cette équation porte le nom d'équation de Dirichlet. On la retrouve en physique sous de très nombreuses formes lorsque l'on s'intéresse aux solutions stationnaires : équation de la chaleur (transfert thermique, diffusion), équation de Schrödinger.

Ondes planes progressives monochromatiques

On peut enfin s'intéresser aux ondes planes progressives monochromatiques de la forme

$$\mathcal{A}(\vec{r},t) = A_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi_0\right)} \tag{3.23}$$
$$= A_0 \exp i\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0\right). \tag{3.24}$$

Les dérivées partielles selon les composantes cartésiennes sont :

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}(\vec{r},t) = ik_x\mathcal{A}(\vec{r},t), \tag{3.25}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{A}(\vec{r},t) = ik_y\mathcal{A}(\vec{r},t), \tag{3.26}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{A}(\vec{r},t) = ik_z\mathcal{A}(\vec{r},t). \tag{3.27}$$

Par conséquent, l'opérateur différentiel $\vec{\nabla}$ en coordonnées cartésiennes est particulièrement simple

$$\vec{\nabla} \to i\vec{k}. \tag{3.28}$$

Attention, cette relation n'est vraie que pour des ondes planes progressives monochromatiques.

Les différents opérateurs s'écrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}(\vec{r},t) = -i\omega\ \mathcal{A}(\vec{r},t) \tag{3.29}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathcal{A}(\vec{r},t) = i\vec{k}\ \mathcal{A}(\vec{r},t), \tag{3.30}$$
$$\mathrm{div}\ \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t), \tag{3.31}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = i\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t). \tag{3.32}$$

Lorsqu'on les appliquent à des ondes planes progessives monochromatiques, les équations de Maxwell deviennent

$$i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}} = \frac{\underline{\rho}}{\varepsilon_0}, \tag{3.33}$$
$$i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{B}} = 0, \tag{3.34}$$
$$i\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}} = i\omega\vec{\mathcal{B}}, \tag{3.35}$$
$$i\vec{k}\times\vec{\mathcal{B}} = \mu_0\underline{\vec{j}} - i\frac{\omega}{c^2}\vec{\mathcal{E}}. \tag{3.36}$$

En combinant ces équations prises en l'absence de charge et de courant, on retrouve la relation entre ω et $\vec{k}$

$$i\vec{k}\times\left(i\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}\right) = i\vec{k}\times\left(i\omega\vec{\mathcal{B}}\right), \tag{3.37}$$

soit

$$\frac{\omega^2}{c^2}\vec{\mathcal{E}} = i\vec{k}\left(i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}\right) - \left(i\vec{k}\cdot i\vec{k}\right)\vec{\mathcal{E}} = \left\|\vec{k}\right\|^2\vec{\mathcal{E}} \tag{3.38}$$

Soit

$$\omega = \left\|\vec{k}\right\| c. \tag{3.39}$$

On retrouve par ailleurs les relations que nous avions déjà établies dans le cas des ondes planes progressives (mais pas nécessairement monochromatiques) dans le vide :

$$\begin{array}{cc} i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}} = 0, & i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{B}} = 0, \\ \vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{\mathcal{E}}, & \vec{\mathcal{E}} = -c\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{\mathcal{B}}. \end{array}$$

3.3 Décomposition d'une onde en ondes monochromatiques

3.3.1 Série de Fourier

Toute fonction $f(t)$ réelle, périodique de période $T = 2\pi/\omega$ peut s'écrire comme somme de fonctions sinusoïdales de période T/n où n est un entier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right] \tag{3.40}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n\cos(n\omega t + \phi_n) \tag{3.41}$$

avec

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \tag{3.42}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt. \tag{3.43}$$

$\frac{a_0}{2}$ est la valeur moyenne de f sur une période. Les termes en ωt constituent la composante fondamentale tandis que les autres termes sont les harmoniques. L'ensemble des (a_n, b_n) pour tous les n est appelé spectre de f. On parle ainsi de décomposition spéctrale de f.

En notation complexe on a

$$f(t) = \Re\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}_n e^{-in\omega t}\right) \tag{3.44}$$

3.3.2 Transformation de Fourier

La théorie mathématique nécessaire pour travailler sans ambiguité avec la transformée de Fourier est la théorie des distributions. On utilisera un bon nombre de résultats sans donner trop de précision, mais en cas de doute sur le résultat d'un calcul, il est trés fortement conseillé d'aller voir dans les ouvrages de mathématiques.

De même que pour la notation complexe, il y a plusieur conventions pour la définition de la transformée de Fourier. Nous utiliserons la suivante : la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ sera notée $f[\omega]$. La fonction $f(t)$ et sa transformée de Fourier sont reliées par les relations suivantes

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f[\omega] e^{-i\omega t}, \tag{3.45}$$

$$f[\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \ f(t) e^{i\omega t}. \tag{3.46}$$

Pour une fonction qui dépend de l'espace, on défini la transformée de Fourier spatiale par

$$g(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} g\left[\vec{k}\right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \tag{3.47}$$

$$g\left[\vec{k}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{r} \ g(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \tag{3.48}$$

On remarquera que la convention de signe dans l'exponentielle est opposée à celle qui a été choisie pour le temps cela provient de la décomposition d'une onde en onde planes

$$f(z-ct) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} f[k] e^{ik(z-ct)}, \tag{3.49}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} f[k] e^{ikz-i\omega t} \tag{3.50}$$

$$= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f\left[\frac{\omega}{c}\right] e^{ikz-i\omega t} \tag{3.51}$$

Remarque

Voici les autres conventions qui sont aussi utilisées. Si l'on souhaite mettre en évidence la réciprocité entre transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \ f[\omega] e^{-i\omega t}, \tag{3.52}$$

$$f[\omega] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \ f(t) e^{i\omega t}. \tag{3.53}$$

Si l'on souhaite mettre en avant la fréquence plutot que la pulsation

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \ f[\nu] e^{-2\pi i\nu t}, \tag{3.54}$$

$$f[\nu] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \ f(t) e^{2\pi i\nu t}. \tag{3.55}$$

3.4 Les différents types d'ondes électromagnétiques

Les frontières qui sont données ici sont des frontières floues.

Ondes radio et microondes

Ce sont les ondes électromagnétiques dont la longueur d'onde est plus grande que le milimètre. Il s'agit des ondes radio pour les longueurs d'onde supérieures au décimètre et les microondes pour les longueurs d'onde entre le millimètre et le décimètre.

Gamme d'ondes	λ (vide)	fréquence
millimétriques	1 mm à 10 mm	30 GHz à 300 GHz
centimétriques ou hyperfréquences	1 cm à 10 cm	3 GHz à 30 GHz
décimétiques	1 dm à 10 dm	300 MHz à 3 GHz
métriques	1 m à 10 m	30 MHz à 300 MHz
décamétriques ou ondes courtes	10 m à 100 m	3MHz à 30 MHz
hectométriques ou ondes moyennes	100 m à 1000 m	300 KHz à 3 MHz
kilométriques ou grandes ondes	1 km à 10 km	30 KHz à 300 KHz
myriamétriques	10 km à 30 km	10 KHz à 30 KHz

Le four à microondes est un sous produit du radar. Les microondes utilisées ont une fréquence de 2,45 GHz. Elles sont résonantes avec une fréquence de transition de la molécule d'eau.

Ondes millimétriques 1 mm à 10 mm, 30 GHz à 300 GHz.
EHF : Extra Hautes Fréquences.

Ondes centimétriques ou hyperfréquences 1 cm à 10 cm, 3 GHz à 30 GHz.
SHF : Super Hautes Fréquences. Satellites de télécommunication.

Ondes décimétriques 1 dm à 10 dm, 300 MHz à 3 GHz.
UHF : Ultra Hautes Fréquences Télévision, radars, téléphone GSM (Bande 900MHz et 1800 MHz).

Ondes métriques 1 m à 10 m, 30 MHz à 300 MHz.
THF : Très Hautes Fréquences ou VHF : Very High Frequencies Télévision et radio en modulation de fréquence, communications de la police et de l'armée.

Ondes décamétriques ou courtes 10 m à 100 m, 3 MHz à 30 MHz.
HF : Hautes Fréquences. CB et radio à grande portée.

Ondes hectométriques ou moyennes 100 m à 1000 m, 300 KHz à 3 MHz.
MF : Moyennes Fréquences. Radio.

Ondes kilométriques ou grandes ondes 1 km à 10 km, 30 KHz à 300 KHz
BF : Basses Fréquences. Radio.

Infrarouge

L'infrarouge s'étend entre les microondes et le visible. L'infrarouge est trés souvent associé au rayonnement thermique. C'est en effet dans cette gamme que les corps à température ambiante rayonnent. On distingue trois types de rayonnement infrarouge :

Gamme d'ondes	λ (vide)	gamme de température
infrarouge proche	$0.7\mu m$ à $5\mu m$	740 K à 3000 K
infrarouge moyen	$5\mu m$ à 30 μm	100 K - 740 K
infrarouge lointain	30 μm à 200 μm	10K à 100K

En astronomie, l'infrarouge permet d'observer des objets trop froids pour rayonner dans le visible.

Infrarouge proche

Rayonnement des géantes rouges et des étoiles rouges froides.

Infrarouge moyen

Planètes comètes et astéroides. Poussières chauffées par les étoiles. Caméras thermiques : détection de pannes, analyse des pertes thermiques.

Infrarouge lointain

Emission de poussières froides. Régions centrales des galaxies

Visible

Longueurs d'onde comprises entre 380 nm et 770 nm

violet	400 nm	450 nm
bleu	450 nm	520 nm
vert	520 nm	560 nm
jaune	560 nm	600 nm
orange	600 nm	630 nm
rouge	630 nm	750 nm

Ultraviolet

Longueurs d'onde inférieure à celles de la lumière visible.

ultraviolet proche	300 nm à 400 nm	UVA (400-315 nm)
ultraviolet moyen	200 à 300 nm	UVB (315-280 nm)
		UVC (280-185 nm)
ultraviolet lointain	90 à 200 nm	

Ultraviolet proche

UVA : Coup de soleil retardé, pigmentation instantanée, fluorescence.

Ultraviolet moyen

UVB : Coup de soleil précoce, pigmentation retardée, aide à produire la vitamine D.
UVC : Pouvoir bactéricide trés élevé.

Rayons X

On distingue deux types de rayon X, les " X mous " avec une longueur d'onde de 5 à 100 Å et les " X durs " avec une longueur d'onde de 0.01 à 0.5 Å

Rayons γ

Les rayons gamma sont des ondes électromagnétiques de longueur d'onde trés faible allant de $10^{-12}m$ à 10^{-14} m. Ils sont produits par des réactions nucléaires.

4 Energie électromagnétique

4.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Energie potentielle d'un système de charges

La première approche de l'énergie en électrostatique conduit à étudier l'énergie d'interaction d'un système de charges. Deux charges q_1 et q_2 séparées d'une distance r ont une énergie d'interaction U_{12} égale à

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{4.1}$$

Il s'agit d'une énergie potentielle d'interaction. On est ensuite conduit à introduire le potentiel électrostatique V créé par une distribution de charges. L'énergie potentielle d'une charge q_1 placée dans ce potentiel au point $\vec{r}$ est alors

$$U = q_1 V(\vec{r}). \tag{4.2}$$

L'énergie d'intéraction d'un sytème de N charges est :

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i, \tag{4.3}$$

où V_i est le potentiel electrostatique créé par toutes les autres charges au point où se trouve la charge i.

Densité locale d'énergie électrostatique

L'énergie électrostatique d'un condensateurde capacité C est

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C U^2. \tag{4.4}$$

où U est la tension aux bornes du consensateur.

La capacité d'un condensateur plan dont les armatures sont séparées par du vide est

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}, \tag{4.5}$$

où S est la surface des armatures et e l'épaisseur du condensateur. L'énergie électrostatique s'écrit donc

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S e \left(\frac{U}{e}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2}{2}\mathcal{V} \tag{4.6}$$

où $\mathcal{V}$ est le volume se trouvant entre les armatures du condensateur et $\vec{E}$ le champ électrique qui y règne. Puisque le champ électrique est uniforme à l'intérieur du condensateur plan et nul ailleurs, on peut donner une nouvelle interprétation à l'énergie électrostatique. Il s'agit d'une énergie stockée dans le champ lui même. La densité volumique d'énergie électrostatique $\mathcal{U}_e$ stockée dans le champ est ainsi :

$$\mathcal{U}_e = \frac{\varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2}{2} \tag{4.7}$$

$$\mathcal{E}_e = \iiint \mathcal{U}_e \, d\tau. \tag{4.8}$$

Energie magnétique statique

De la même manière on peut s'intéresser à l'énergie magnétique d'un solénoide.

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L I^2. \tag{4.9}$$

L'inductance L d'un solenoide de grande longueur l, dont la surface de la section est S et qui comporte N spires est :

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}. \tag{4.10}$$

L'intensité du champ magnétique $\vec{B}$ qui règne à l'intérieur est :

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I. \tag{4.11}$$

Par conséquent, tout comme pour l'énergie du condensateur, on peut mettre l'énergie du solenoide sous forme d'un produit de son volume $\mathcal{V}$ par une densité d'énergie magnétique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{\left|\vec{B}\right|^2}{2\mu_0} \mathcal{V} \tag{4.12}$$

La densité volumique d'énergie magnétique $\mathcal{U}_m$ stockée dans le champ est ainsi :

$$\mathcal{U}_m = \frac{\left|\vec{B}\right|^2}{2\mu_0} \tag{4.13}$$

$$\mathcal{E}_m = \iiint \mathcal{U}_m \, d\tau. \tag{4.14}$$

Les expressions que nous venons d'écrire pour le champ électrique et ou le champ magnétique dans deux cas particuliers de système electrostatique et magnétostatique nous permettrons d'interpréter l'expression que nous allons obtenir en réalisant le bilan énergétique complet du champ électromagnétique.

4.2 Le vecteur de Poynting

La conservation de l'énergie est l'un des principes de base de la physique . En presence de charges et de courants, il peut y avoir un échange d'énergie entre le champ électromagnétique et la matière : l'énergie électromagnétique est transformée en énergie mécanique ou réciproquement. En l'absence de charges et de courants, l'énergie électromagnétique est une quantité qui se conserve.

Pour exprimer cette conservation, il faut introduire un vecteur densité de courant d'énergie. Ce vecteur est appelé vecteur de Poynting et il est noté $\vec{\Pi}$. Si l'on note $\mathcal{U}$ la densité volumique d'énergie électromagnétique, la relation de conservation est :

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{U}\ d\tau\right) = -\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{\Pi}\cdot d\vec{S}. \tag{4.15}$$

La relation de conservation locale s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{\Pi} = 0. \tag{4.16}$$

Le vecteur de Poynting est un vecteur qui représente la densité de courant d'énergie. Autrement dit, la puissance électromagnétique $\mathcal{P}$ qui traverse une surface $\mathcal{S}$ est le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface :

$$\mathcal{P} = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi}\cdot d\vec{S}. \tag{4.17}$$

Lorsque l'on parle d'un faisceau lumineux, on appelle intensité cette puissance et on la note $\mathcal{I}$. La surface Σ considérée doir intersecter totalement le faisceau lumineux.

4.3 Expression de l'énergie électromagnétique

Calculons la divergence du produit vectoriel du champ électrique et du champ magnétique

$$\mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ E\right) - \vec{E}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B}\right) \tag{4.18}$$

Soit, en utilisant Maxwell Ampère et Maxwell Faraday dans le vide :

$$\mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E}\cdot\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \tag{4.19}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\left|\vec{B}\right|^2}{2} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\left|\vec{E}\right|^2}{2}\right) - \mu_0\vec{E}\cdot\vec{j}. \tag{4.20}$$

ou encore, en divisant par μ_0

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\frac{\left|\vec{E}\right|^2}{2} + \frac{\left|\vec{B}\right|^2}{2\mu_0}\right) + \mathrm{div}\left(\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\right) = -\vec{E}\cdot\vec{j}. \tag{4.21}$$

En l'absence de courants ($\vec{j} = 0$), nous pouvons reconnaitre l'énergie électrostatique et déduire l'expression du vecteur de Poynting. Dans les régimes dépendant du temps, l'énergie électromagnétique a la même expression que dans les régimes statiques : c'est la somme de l'énergie électrique et de l'énergie magnétique

$$\mathcal{U}_{em} = \varepsilon_0 \frac{\left|\vec{E}\right|^2}{2} + \frac{\left|\vec{B}\right|^2}{2\mu_0}. \tag{4.22}$$

Le vecteur de Poynting est proportionnel au produit vectoriel du champ électrique et du champ magnétique

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}. \tag{4.23}$$

Le terme $-\vec{E} \cdot \vec{j}$ est un terme source. $\vec{E} \cdot \vec{j}$ est la puissance cédée par le champ électromagnétique aux charges par unité de volume.

$$\frac{\delta \mathcal{P}}{\delta \mathcal{V}} = \frac{1}{\delta \mathcal{V}} \sum_{i \in \delta \mathcal{V}} \left[q_i \vec{E}\left(\vec{r}_i\right)\right] \cdot \vec{v}_i = \vec{E}\left(\vec{r}_i\right) \frac{1}{\delta \mathcal{V}} \sum_{i \in \delta \mathcal{V}} q_i \cdot \vec{v}_i = \vec{E} \cdot \vec{j}. \tag{4.24}$$

Nous remarquerons qu'il n'a rien fallu ajouter de supplémentaire aux équations de Maxwell : la conservation de l'énergie est une conséquence des équations de Maxwell-Faraday, Maxwell-Ampère et de l'expression de la force de Lorentz.

4.4 Ondes planes progressives

4.4.1 Energie et quantité de mouvement

Energie

Pour une onde plane progessive, le champ électrique, le champ magnétique et le vecteur d'onde forment un trièdre direct et de plus :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \times \vec{E}. \tag{4.25}$$

On en déduit l'expression de l'énergie électromagnétique et du vecteur de Poynting

$$\mathcal{U}_{em} = \varepsilon_0 \frac{\left|\vec{E}\right|^2}{2} + \frac{\left|\frac{\vec{E}}{c}\right|^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2 \tag{4.26}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\left|\vec{E}\right|^2}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c \left|\vec{E}\right|^2 \vec{u}. \tag{4.27}$$

Par conséquent

$$\vec{\Pi} = c\mathcal{U}_{em} \vec{u}. \tag{4.28}$$

L'énergie électromagnétique se déplace dans le vide à la vitesse de la lumière dans le vide.

Quantité de mouvement

Regardons le travail et la force exercée par une onde électromagnétique sur une charge. L'onde exerce sur cette charge la force de Lorentz

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{4.29}$$

La puissance de cette force est

$$\mathcal{P} = \vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = \vec{v} \cdot q\vec{E} \tag{4.30}$$

Pour une onde plane progessive

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{u} \times \vec{E} \tag{4.31}$$

La force est donc

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \frac{1}{c}\left(\vec{u} \times \vec{E}\right)\right) \tag{4.32}$$

$$= q\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{u}\left(\vec{v} \cdot q\vec{E}\right) - \frac{1}{c}\left(\vec{v} \cdot \vec{u}\right)\vec{E} \tag{4.33}$$

$$= \vec{F}_e + \frac{1}{c}\mathcal{P}\vec{u} - \frac{1}{c}\left(\vec{v} \cdot \vec{u}\right)\vec{E} \tag{4.34}$$

Le deuxieme terme est appelé pression de radiation.

Les ondes electromagnétiques transportent aussi de la quantité de mouvement : un objet qui absorbe ou réfléchit une onde électromagnétique subit une force : la pression de radiation. On montre que le vecteur de Poynting est aussi la densité de quantité de mouvement.

4.4.2 Le photon

La lumière est composée de photons. Pour une lumière monochromatique, l'énergie d'un photon de fréquence υ est

$$E = h\upsilon = \hbar\omega, \tag{4.35}$$

avec

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}. \tag{4.36}$$

où h est la constante de Planck et $\hbar$ la constante de Planck réduite. La quantité de mouvement d'un photon est donc

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} = \frac{h\upsilon}{c}\vec{u} \tag{4.37}$$

La lumière transporte aussi du moment cinétique. Un photon polarisé circulairement possede un moment cinétique $\hbar$.

Le flux de photons $\frac{\delta N}{\delta t}$ qui traverse une surface est le rapport de la puissance qui traverse cette surface et de l'énergie d'un photon :

$$\frac{\delta N}{\delta t} = \frac{\mathcal{P}}{h\upsilon} \tag{4.38}$$

4.5 Détection des ondes électromagnétiques

4.5.1 Mesure du champ électromagnétique

Les antennes permettent de mesurer directement l'amplitude du champ electromagnétique. Le champ électrique de l'onde électromagnétique met en mouvement les électrons d'un conducteur, le courant électrique ainsi créé est détecté directement.

4.5.2 Mesure de l'énergie

Les bolomètres mesurent l'énergie transportée par le champ électromagnétique. Le détecteur absorbe l'énergie apportée par le champ électromagnétique. La mesure de l'échauffement permet de déterminer l'intensité de l'onde électromagnétique.

4.5.3 Mesure du nombre de photons

L'arrivée d'un photon sur le détecteur excite un électron unique. Dans un photomultiplicateur, l'électron est arraché de la surface par effet photoélectrique, il est accéléré et arrache à son tour des électrons en arrivant sur une seconde electrode. Chaque photon donne lieu à une charge macroscopique directement détectable. Dans une photodiode ou un capteur CCD, le photon créee une paire électron - trou. Pour ces détecteurs la charge électrique créée par l'arrivée de la lumière est proportionelle au nombre de photons reçus. Ce type de détecteur a un seuil : pour provoquer la transition le photon doit avoir un énergie minimale.

Pour un photodétecteur telle une photodiode, chaque photon crée un électron. Pour une onde monochromatique le courant électrique i est donc

$$i = e\frac{\delta N}{\delta t} = \frac{e}{h\upsilon}\mathcal{I}. \tag{4.39}$$

5 Les conducteurs électriques

5.1 Introduction

Un conducteur électrique est un milieu dans lequel des charges électriques sont libres de se déplacer. Ces charges sont des électrons ou des ions. Les métaux, les électrolytes et les plasmas (gaz ionisés) sont des milieux conducteurs.

5.1.1 Conducteur dans un champ électrique statique

Plaçons un morceau de métal dans un champ électrique statique. A l'intérieur du métal, les électrons de conduction, qui sont libres de se déplacer dans tout le volume, sont soumis à une force qui les met en mouvement. Les électrons sont stopppés à leur arrivée sur les parois du métal et s'y accumulent. Leur accumulation crée un champ électrique qui s'additionne au champ extérieur. Aprés cette phase transitoire, on atteint un état d'équilibre.

A l'équilibre, les électrons qui sont à l'intérieur du conducteur sont immobiles. Cela signifie que le champ électrique auquel ils sont soumis est nul. *Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un milieu conducteur à l'équilibre.* On déduit immédiatement à partir du théorème de Gauss que la densité totale de charge est nulle : *la densité volumique de charge est nulle à l'intérieur d'un milieu conducteur.* Dans un métal par exemple, la densité de charge négative due aux électrons compense donc exactement la densité de charges positives due aux noyaux.

Puisqu'à l'extérieur du conducteur, le champ électrique n'est pas nul, il y a une discontinuité du champ électrique à la surface du conducteur. Une partie des charges s'est accumulée en surface. Le champ créé par cette densité surfacique de charge à l'intérieur du conducteur y compense exactement le champ électrique extérieur.

Lorsque l'on change le champ électrique extérieur, les charges se déplacent de sorte que le champ électrique reste nul à l'intérieur. Si le changement est lent, les courants électriques sont des courants surfaciques.

5.1.2 Conducteurs dans un champ électrique variable

Lorsque le champ électrique change, la mise à l'équilibre ne peut pas être instantanée car les charges électriques doivent se mettre en mouvement. Deux phénomènes interviennent alors : l'inertie des charges est à l'origine d'un retard de la réponse, les collisions des porteurs sont à l'origine de dissipation. Avant d'étudier les conducteurs réels, on considèrera une situation modèle où ces deux phénomènes sont absents.

Dans cette situation idéalisée, on considérera qu'il n'y a pas de dissipation et que la réponse est instantanée. On parlera alors de conducteur parfait ou de conducteur idéal.

5.2 Du conducteur parfait aux conducteurs réels

Le conducteur parfait est une idéalisation des conducteurs réels. L'étude des conducteurs réels permettra de déterminer les domaines de paramètres dans lesquels on peut les considérer comme idéaux. Les milieux supraconducteurs où la dissipation est parfaitement nulle sont aussi un trés bon exemple de ce que peut être un conducteur idéal (on notera toutefois que seule la dissipation est absente de ces milieux : les électrons y conservent leur inertie).

5.2.1 Le conducteur parfait

Un conducteur parfait se comporte en régime dynamique de la même manière qu'un conducteur en régime statique. Pour un conducteur parfait, le champ électrique intérieur $\vec{E}_{\text{int}}$est nul :

$$\vec{E}_{\text{int}}\left(\vec{r},t\right)=0. \tag{5.1}$$

On déduit de l'équation de Maxwell-Gauss que la densité volumique de charge est nulle :

$$\rho_{\text{int}}\left(\vec{r},t\right)=\varepsilon_0 \text{ div } \vec{E}_{\text{int}}=0. \tag{5.2}$$

Par conséquent, seule la densité surfacique de charge peut être différente de zéro.

L'équation de Maxwell-Faraday permet de conclure qu'à l'intérieur d'un conducteur parfait le champ magnétique ne peut dépendre du temps :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=-\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E}=0. \tag{5.3}$$

Dans un conducteur parfait le champ magnétique est nécessairement statique. On notera que dans les supraconducteurs, le champ magnétique est nul (effet Meissner : lorsqu'un conducteur passe de l'atét normal à l'état supraconducteur, les lignes de champ magnétiques sont expulsées de sorte que le champ magnétique devient nul à l'interieur du supraconducteur).

On déduit alors de l'équation de Maxwell-Ampère que les courants électriques sont nécessairement stationnaires, c'est à dire indépendants du temps :

$$\vec{j}=\frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}. \tag{5.4}$$

Les seuls courants qui peuvent dépendre du temps sont les courants surfaciques.

5.2.2 Réflexion sur un conducteur parfait

Que se passe-t-il lorsqu'une onde électromagnétique arrive sur un conducteur parfait ? Cette onde met en mouvement les charges en surface du conducteur. A l'intérieur du conducteur le champ électrique tout comme le champ magnétique restent nuls. Le champ électromagnétique émis par les charges en mouvement à la surface du conducteur compense exactement le champ incident à l'intérieur du conducteur : la surface émet une onde de même amplitude que le champ incident et en opposition de phase. Si la surface est un plan, on déduit par symétrie que le champ émis par ces charges en mouvement vers l'extérieur du conducteur est le symétrique du champ qu'il émet vers l'intérieur. On retrouve bien ce que l'on attend d'un miroir, avec en suplément le fait que le champ réfléchi subit un déphasage de π par rapport au champ incident.

5.3 Modèles de conducteurs réels

L'étude des milieux n'est pas une théorie "à principes" comme peut l'être l'electromagnétisme dans le vide. Pour l'électromagnétisme dans le vide, il suffit de prendre comme postulat les quatre équations de Maxwell, l'expression de la force de Lorentz et la relation fondamentale de la dynamique. Tout le reste se construit à partir de ces équations et s'en déduit par des raisonnements logiques.

Pour les milieux, on ne dispose pas de système d'équations que l'on pourrait considérer comme des postulats. Les théories les plus précises dont on dispose sont extrèmement complexes et font appel à la théorie quantique. Notre but ici est plutot d'étudier des grandes classes de comportement génériques, en particulier dans des cas limites. Pour cela les matériaux seront décrits d'une part au niveau macroscopique par des "équations d'état" (aussi nommées relations constitutives) c'est à dire des coefficients tels que la conductivité electrique, la permittivité, ... On dispose aussi de modèles microscopiques que l'on qualifie de phénoménologiques car certains aspects ne sont pas déduits des premiers principes mais ajoutés "à la main" de manière à ce que le comportement obtenu mime au mieux le comportement observé dans les matériaux réels. Outre leur aspect prédictif, ces modèles ont le grand intéret de nourrir l'intuition physique. Il faut toutefois rester vigilant et ne pas les prendre forcement au pied de la lettre. On notera aussi que si certaines justifications parfois données pour ces modèles semblent simplistes, il existe trés souvent des raisons très profondes à leur efficacité.

5.3.1 L'électron amorti

Dans le modèle proposé, on considère que les électrons sont responsables de la conduction du milieu. Un électron libre de masse m_e et de charge électrique $q = -e$ obéit à l'équation d'évolution suivante :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_L - \Gamma \vec{v}. \tag{5.5}$$

Le permier terme, $\vec{F}_L$ est la force de Lorentz :

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right). \tag{5.6}$$

Dans la suite, lorsque le champ électrique et le champ magnétique viennent tout deux d'une même onde électromagnétique, on négligera en général le terme dù au champ magnétique, inférieur à celui du champ électrique d'un facteur $\frac{v}{c}$ qui est trés petit tant que les vitesses ne sont pas relativistes. Attention, lorsque l'on est en présence d'une onde électromagnétique et d'un champ magnétique statique, seul le champ magnétique provenant de l'onde peut être négligé, car lui seul est proportionel au champ électrique. Le champ statique peut conduire à une force comparable à celle du champ électrique de l'onde même si les vitesses ne sont pas relativistes.

Le second terme $-\Gamma\vec{v}$ est une force de friction visqueuse ajoutée pour des raisons phénoménologiques. Il rend compte des mécanismes dissipatifs présents dans le milieu. Le coefficient de friction ne peut en général pas être calculé à partir des premiers principes (équations de Maxwell, mécanique quantique, ...), on obtient en géneral sa valeur en le reliant aux paramètres macroscopiques du milieu. Dans un plasma, la friction est due aux collisions des électrons avec les ions et avec les molécules restées neutres. Dans un métal, il s'agit de l'interaction entre les électrons et les vibrations mécaniques du réseau cristallin.

Dans un champ électrique statique $\vec{E}_0$, l'équation d'évolution de l'électron a pour solution :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\frac{q}{\Gamma}\vec{E}_0. \tag{5.7}$$

où $\vec{v}_0$ est la vitesse de l'électron à l'instant initial $t = 0$. Le temps caractéristique d'amortissement est τ

$$\tau = \frac{m_e}{\Gamma} \tag{5.8}$$

la vitesse initiale est amortie tandis que la vitesse de l'électron tend vers une vitesse limite $\vec{v}_l$:

$$\vec{v}_l = \frac{q}{\Gamma}\vec{E}_0. \tag{5.9}$$

5.3.2 Conductivité électrique

Lorsque la densité volumique d'électrons est N_e, la densité stationnaire de courant $\vec{j}$ est

$$\vec{j} = qN_e\vec{v}_l = \frac{N_e e^2}{\Gamma}\vec{E}_0. \tag{5.10}$$

Cette densité de courant est proportionelle au champ électrique : on retrouve ainsi un comportement ohmique

$$\vec{j} = \sigma_0\vec{E}_0 \tag{5.11}$$

correspondant à une conductivité σ_0 :

$$\sigma_0 = \frac{N_e e^2}{\Gamma}. \tag{5.12}$$

Pour un milieu donné, on peut donc reexprimer le coefficient de friction phénoménologique Γ à l'aide de constantes fondamentales ou de grandeurs macroscopiques mesurées :

$$\Gamma = \frac{N_e e^2}{\sigma_0} \tag{5.13}$$

on en déduit aussi le temps caractérisque d'amortissment :

$$\tau^{-1} = \frac{N_e e^2}{\sigma_0 m_e} \tag{5.14}$$

Si le champ électrique n'est plus statique mais dépend du temps, tant que le temps caractérique d'évolution du champ électrique est grand devant ce temps d'amortissment, les électrons sont en permanence à leur vitesse limite et le conducteur est ohmique.

De manière plus générale, on peut analyser la réponse du milieu à un champ électrique sinusoidal. En notation complexe, l'équation du mouvement devient

$$\left(-i\omega m_e + \Gamma\right) \underline{\vec{v}} e^{-i\omega t} = q\vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t} \tag{5.15}$$

soit une vitesse

$$\underline{\vec{v}} = \frac{q}{\Gamma - i\omega m_e} \vec{\mathcal{E}}_0 \tag{5.16}$$

La densité de courant est alors

$$\underline{\vec{j}} = \frac{N_e e^2}{\Gamma - i\omega m_e} \vec{\mathcal{E}}_0 = \frac{N_e e^2}{\Gamma} \frac{1}{1 - i\omega \frac{m_e}{\Gamma}} \vec{\mathcal{E}}_0 = \sigma_0 \frac{1}{1 - i\omega\tau} \vec{\mathcal{E}}_0 \tag{5.17}$$

On en déduit qu'en régime sinusoidal la conductivité devient complexe et dépend de la fréquence

$$\sigma\left[\omega\right] = \sigma_0 \frac{1}{1 - i\omega\tau}. \tag{5.18}$$

Ce modèle proposé par le physicien Drude rend très bien compte de la dépendance en fréquence de la conductivité pour de trés nombreux matériaux. On notera toutefois que si l'on souhaite une description plus précise, il faut aller chercher les valeurs de la conductivité expérimentales dans des tables.

5.4 Propagation dans les conducteurs

5.4.1 Les conducteurs ohmiques

Ces conducteurs sont caractérisés en volume par l'équation d'état

$$\rho = 0 \tag{5.19}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{5.20}$$

avec une conductivité σ réelle. Les équations de Maxwell s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}
\text{div } \vec{E} &= 0 && (5.21)\\
\text{div } \vec{B} &= 0 && (5.22)\\
\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && (5.23)\\
\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} &= \mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} && (5.24)
\end{aligned}$$

De même qu'en l'absence de charges, on obtient une équation de propagation pour le champ électrique seul en calculant le double rotationnel du champ électrique

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E}\right) &= \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div } \vec{E} - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} && (5.25)\\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) && (5.26)
\end{aligned}$$

soit

$$\Delta\vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.27)$$

Un terme supplémentaire proportionel à la dérivée temporelle du champ électrique s'ajoute à l'équation de d'Alembert. Cette équation reste toutefois linéaire. Toute solution de cette équation peut donc s'écrire comme une superposition de solutions monochromatiques (grâce à la transformée de Fourier). En notation complexe, l'amplitude complexe $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)$ d'une solution monochromatique de pulsation ω s'écrit

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}. \quad (5.28)$$

$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ vérifie l'équation suivante :

$$\Delta\vec{\mathcal{E}} = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \vec{\mathcal{E}} - i\omega\mu_0\sigma\vec{\mathcal{E}}. \quad (5.29)$$

Si on se restreint à une onde plane se propageant selon l'axe Oz et polarisée selon Ox $\left(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \mathcal{E}(z)\,\vec{u}_x\right)$cette équation devient

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\mathcal{E}(z) = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \mathcal{E}(z) - i\omega\mu_0\sigma\mathcal{E}(z)\,. \quad (5.30)$$

Les solutions de cette équation s'écrivent de manière semblable à celle des ondes progressives

$$\mathcal{E}(z) = \mathcal{E}_1 e^{ikz} + \mathcal{E}_2 e^{-ikz} \quad (5.31)$$

où la grandeur k vérifie l'équation

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 + i\omega\mu_0\sigma. \quad (5.32)$$

Ce "nombre d'onde" k n'est pas réel mais a une partie imaginaire non nulle. On parle donc parfois de pseudo vecteur d'onde ou pseudo nombre d'onde.

Plutot que de décrire le cas général, nous allons discuter les deux situations limites correspondant aux situations ou l'un des deux termes du second membre est négligeable devant l'autre. Ces deux situations sont les suivantes :
- $\sigma \ll \varepsilon_0\omega$: Il s'agit du cas des mauvais conducteurs électriques aussi appelés milieux à pertes.
- $\sigma \gg \varepsilon_0\omega$: il s'agit des très bons conducteurs.

Avant de passer à la discussion déterminons le champ magnétique. On se sert pour cela de l'équation de Maxwell Faraday qui n'est pas modifiée par la présence du conducteur :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5.33}$$

Soit, si l'on ne considère que la solution $\mathcal{E}_1 e^{ikz}$

$$ik\ \vec{u}_z \times \vec{\mathcal{E}}_1 = i\omega\ \vec{\mathcal{B}} \tag{5.34}$$

Soit

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{k}{\omega}\ \vec{u}_z \times \vec{\mathcal{E}}_1 \tag{5.35}$$

Attention k est complexe. Le champ magnétique est donc déphasé par rapport au champ électrique.

5.4.2 Propagation dans un mauvais conducteur

Pour les mauvais conducteurs ($\sigma \ll \varepsilon_0\omega$), le terme supplémentaire dans l'équation de propagation peut être vu comme un terme correctif à la propagation dans le vide. Le vecteur d'onde est très peu différent du vecteur d'onde $k_0 = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\omega = \frac{\omega}{c}$ dans le vide :

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\mu_0\varepsilon_0\omega^2 + i\omega\mu_0\sigma} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{1 + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}} && (5.36) \\ &\simeq \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\omega\left(1 + i\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\omega}\right) = k_0 + i\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. && (5.37) \end{aligned}$$

Il apparait une longueur caractéristique l_p :

$$l_p = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}. \tag{5.38}$$

On peut donc écrire

$$k = k_0 + i\frac{1}{l_p}. \tag{5.39}$$

Les solutions à l'équation de propagation sont donc dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z,t) &= \mathcal{E}_1 \exp\left[i\left(\left(k_0 + i\frac{1}{l_p}\right)z - \omega t\right)\right] && (5.40) \\ &\quad + \mathcal{E}_2 \exp\left[i\left(-\left(k_0 + i\frac{1}{l_p}\right)z - \omega t\right)\right] && (5.41) \\ &= e^{-\frac{z}{l_p}} e^{i(k_0 z - \omega t)} + \mathcal{E}_2 e^{\frac{z}{l_p}} e^{i(-k_0 z - \omega t)} && (5.42) \end{aligned}$$

Soit en revenant à l'amplitude réelle

$$E(z,t) = E_1 e^{-\frac{z}{l_p}} \cos(k_0 z - \omega t + \varphi_1) + E_2 e^{\frac{z}{l_p}} \cos(-k_0 z - \omega t + \varphi_2) \tag{5.43}$$

Le premier terme correspond à une onde qui se propage vers les z croissants tout en s'atténuant tandisque la seconde correspond à une onde qui se propage vers les z décroissants qui s'atténue elle aussi. L'amplitude de l'onde décroit de $1/e$ au bout de la distance l_p. On remarquera que cette distance d'absorption ne dépend pas de la fréquence. L'énergie perdue par l'onde électromagnétique est transformée en chaleur par effet Joule.

5.4.3 Les bons conducteurs : l'effet de peau

pour les bons conducteurs ($\varepsilon_0\omega \ll \sigma$) c'est le second terme qui est dominant :

$$k^2 = i\omega\mu_0\sigma \tag{5.44}$$

dont la solution de partie imaginaire positive est

$$k = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu_0\sigma} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} \tag{5.45}$$

k s'exprime en fonction d'une longueur caractéristique δ

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \tag{5.46}$$

Cette longueur caractéristique est très petite devant la longueur d'onde dans le vide :

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} = k_0\delta = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\omega \cdot \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}} \ll 1 \tag{5.47}$$

puisque nous avons fait l'hypothèse de bon conducteur $\varepsilon_0\omega \ll \sigma$

La solution de l'équation s'écrit alors :

$$\mathcal{E}(z,t) = \mathcal{E}_1 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)} + \mathcal{E}_2 e^{\frac{z}{\delta}} e^{i\left(-\frac{z}{\delta} - \omega t\right)} \tag{5.48}$$

Soit en notation réelle

$$E(z,t) = E_1 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \varphi_1\right) + E_2 e^{\frac{z}{\delta}} \cos\left(-\frac{z}{\delta} - \omega t + \varphi_2\right) \tag{5.49}$$

La décroissance exponentielle fait penser à ce qui se passe dans le cas du mauvais conducteur mais il n'en est rien comme nous allons le voir en étudiant la réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur.

5.4.4 La reflexion d'une onde par un conducteur réel

On considère que le demi espace $z < 0$ est vide tandisqu'un conducteur de conductivité σ occupe le demi espace $z > 0$. Pour déterminer ce qui se passe lorsqu'une onde arrive sur le conducteur, il faut établir les relations de passage entre les deux milieux.

Avant de traiter les conditions de passage entre milieux de manière générale, on considère ici le cas où l'onde arrive perpendiculairement à la surface du conducteur. Il n'y a alors ni charge surfacique, ni courant de surface, de sorte que le champ électrique et le champ magnétique sont tous deux continus lors de la traversée de l'interface vide conducteur (ne ne justifions pas pour l'instant ces deux affirmations cela sera fait lorsque nous nous intéresseront plus précisément aux relations de passage).

Dans le demi espace $z < 0$ le champ est la superposition d'une onde progressive et d'une onde régressive

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \mathcal{E}_{\mathrm{in}} e^{i(k_0 z-\omega_0 t)} \vec{u}_x + \mathcal{E}_{\mathrm{ref}} e^{i(-k_0 z-\omega_0 t)} \vec{u}_x \tag{5.50}$$

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) = \frac{k_0}{\omega_0}\left(\mathcal{E}_{\mathrm{in}} e^{i(k_0 z-\omega_0 t)} \vec{u}_y - \mathcal{E}_{\mathrm{ref}} e^{i(-k_0 z-\omega_0 t)} \vec{u}_y\right) \tag{5.51}$$

En ce qui concerne le conducteur, c'est à dire pour $z > 0$, comme nous considérons que celui ci s'étend jusqu'à l'infini, seule la solution qui décroit exponentiellement vers la droite est acceptable

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \mathcal{E}_{\mathrm{tr}} e^{i(kz-\omega_0 t)} \vec{u}_x \tag{5.52}$$

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) = \frac{k}{\omega_0}\mathcal{E}_{\mathrm{in}} e^{i(kz-\omega_0 t)} \vec{u}_y \tag{5.53}$$

La continuité du champ électrique et du champ magnétique en $z = 0$ permet de déduire :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{in}} + \mathcal{E}_{\mathrm{ref}} = \mathcal{E}_{\mathrm{tr}} \tag{5.54}$$

$$\frac{k_0}{\omega_0}\left(\mathcal{E}_{\mathrm{in}} - \mathcal{E}_{\mathrm{ref}}\right) = \frac{k}{\omega_0}\mathcal{E}_{\mathrm{tr}} \tag{5.55}$$

Soit

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ref}} = \frac{k_0 - k}{k + k_0}\mathcal{E}_{\mathrm{in}} \tag{5.56}$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{tr}} = \frac{2k_0}{k + k_0}\mathcal{E}_{\mathrm{in}} \tag{5.57}$$

Reprenons le cas du mauvais conducteur

$$k = \left(k_0 + i\frac{1}{l_p}\right). \tag{5.58}$$

Ce qui donne

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ref}} \simeq -i\frac{1}{2k_0 l_p}\mathcal{E}_{\mathrm{in}} \tag{5.59}$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{tr}} \simeq \mathcal{E}_{\mathrm{in}} \tag{5.60}$$

Il n'y a quasiment pas de réflexion. Le champ se propage dans le conducteur et il est progressivement absorbé.

Dans le cas du bon conducteur

$$k = \frac{1+i}{\delta} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{ref}} &= \frac{k_0\delta - (1+i)}{(1+i) + k_0\delta}\mathcal{E}_{\text{in}} = -\frac{1 - \frac{\delta k_0}{(1+i)}}{1 + \frac{\delta k_0}{(1+i)}}\mathcal{E}_{\text{in}} && (5.62)\\
&\simeq -\left(1 - \frac{\delta k_0}{(1+i)}\right)\left(1 - \frac{\delta k_0}{(1+i)} + ...\right)\mathcal{E}_{\text{in}} \simeq -\left(1 - (1-i)\,\delta k_0\right)\mathcal{E}_{\text{in}} && (5.63)\\
\mathcal{E}_{\text{tr}} &= \frac{2k_0}{\frac{1+i}{\delta} + k_0}\mathcal{E}_{\text{in}} = (1-i)\,k_0\delta\mathcal{E}_{\text{in}} && (5.64)
\end{aligned}$$

Or

$$\delta k_0 = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}} \tag{5.65}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{ref}} &= \simeq \left(1 - (1-i)\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}}\right)\mathcal{E}_{\text{in}} && (5.66)\\
\mathcal{E}_{\text{tr}} &= (1-i)\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}}\mathcal{E}_{\text{in}} && (5.67)
\end{aligned}$$

Remarques sur l'effet de peau

L'épaisseur de peau est inversement proportionelle à la fréquence : plus les fréquence sont élevées et moins les ondes pénètrent dans les conducteurs. Dans les fils, à partir d'une certaine fréquence, la conduction se fait en surface.

5.5 Les plasmas

Un plasma est un gaz partiellement ou totalement ionisé. C'est donc un milieu globalement neutre dans lequel on trouve des électrons, des ions et éventuellement des atomes ou des molécules neutres. Comme les ions sont plus de mille fois plus lourds que les électrons, l'amplitue de leurs mouvement et donc le cournat électrique qui leur est associé est négligeable devant le courant électronique.

Pour les plasma, l'inertie des électrons est un phénomène important. On s'interesse donc maintenant au cas plus général ou l'inertie compte.soit

$$\vec{j} = \frac{N_e e^2}{\Gamma - i m_e \omega}\vec{E} \tag{5.68}$$

On peut distinguer deux régimes : les basses fréquences, où la dissipation est dominante et les hautes fréquences où les effets d'inertie deviennent dominants. Dans le domaine basse fréquence, la prise en compte de l'inertie vient en correction de la dissipation. Cela revient juste à donner une partie imaginaire à la conductivité.

En haute fréquence, on rencontre par compte des phénomènes nouveaux. Nous commencerons donc à étudier la dynamique d'un plasma libre.

5.5.1 Dynamique d'un plasma libre

L'équation d'évolution de la vitesse ou, ce qui est équivalent celle de la densité volumique de courant est :

$$\Gamma\vec{j} + m_e\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = N_e e^2\vec{E}. \tag{5.69}$$

Combinons cette équation avec la relation de conservation de la charge électrique (Nous rappelons que la conservation de la charge est incluse dans les équations de Maxwell).

Cette équation s'écrit :

$$\text{div }\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \tag{5.70}$$

Prenons donc la divergence de l'équation d'évolution de la densité de courant $\vec{j}$

$$\Gamma\text{div }\vec{j} + m_e\frac{\partial\text{div }\vec{j}}{\partial t} = N_e e^2\text{div }\vec{E} \tag{5.71}$$

$$-\Gamma\frac{\partial\rho}{\partial t} - m_e\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = N_e e^2\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{5.72}$$

soit

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{N_e e^2}{m_e\varepsilon_0}\rho = 0 \tag{5.73}$$

On trouve une équation d'évolution locale pour la densité electronique

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_0}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \omega_p^2\rho = 0 \tag{5.74}$$

C'est l'équation d'évolution d'un oscillateur harmonique. Le temps $\tau_0 = \frac{\Gamma}{m_e}$ est le temps caractéristique d'amortissement de la vitesse.et ω_p une pulsation appelée pulsation plasma :

$$\omega_p^2 = \frac{N_e e^2}{m_e\varepsilon_0}. \tag{5.75}$$

En l'absence de dissipation, un plasma est le siège d'oscillations à cette pulsation. On remarquera que la densité intervient dans la pulsation plasma : pour les faibles densités, la pulsation plasma est inférieure au temps caractéristique d'amortissement et il n'y a pas d'oscillations.

5.5.2 Propagation d'ondes dans un plasma

Comme dans un plasma la densité locale de charges peut être différente de zéro, la divergence du champ électrique n'est pas nécessairement nulle. On distingue deux types d'ondes : les ondes transverses, pour lesquelles la divergence du champ électrique est nul, ce sont celles que nous considérerons dans la suite. Il y a aussi des ondes longitudinales, qui correspondent aux oscillations plasma dans les fréquence supérieures à la fréquence plasma et aux ondes pseudo-sonores dans le domaine des basses fréquences.

Nous nous limitons maintenant aux ondes transverses, c'est à dire les ondes pour lesquelles

$$\text{div } \vec{E} = 0 \tag{5.76}$$

sans oublier que la divergence du champ magnétique est elle toujours nulle (Maxwell-flux)

$$\text{div } \vec{B} = 0 \tag{5.77}$$

Nous commencerons en nous limitant aux effets inertiels et nous introduirons la dissipation par la suite. Dans cette situation :

$$m_e \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = N_e e^2 \vec{E}. \tag{5.78}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{-i\omega} \frac{N_e e^2}{m_e} \vec{E} = i \frac{\omega_p^2}{\omega} \varepsilon_0 \vec{E} \tag{5.79}$$

Si l'on considère des ondes dont l'amplitude complexe est :

$$\vec{\mathcal{E}}\left(\vec{r}, t\right) = \mathcal{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)} \vec{u} \tag{5.80}$$

Maxwell-Faraday et Maxwell Ampère deviennent :

$$i\ \vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = -\left(-i\omega\vec{\mathcal{B}}\right) \tag{5.81}$$

$$i\ \vec{k} \times \vec{\mathcal{B}} = \mu_0\ \underline{\vec{j}} + \mu_0\varepsilon_0 \left(-i\omega\vec{\mathcal{E}}\right) = \left(i\ \mu_0\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} - i\omega\mu_0\varepsilon_0\right) \vec{\mathcal{E}} \tag{5.82}$$

On en déduit l'équation de dispersion suivante

$$k^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \omega_p^2\right) \tag{5.83}$$

La pulsation plasma ω_p sépare deux zones de fréquence où le plasma a des comportements très différents.

Domaine des basses fréquences : $\omega < \omega_p$

Dans ce domaine k^2 est négatif. k est donc imaginaire pur :

$$k = \pm i \frac{1}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} \tag{5.84}$$

Il n'y a aucune propagation dans le plasma. Ce milieu réflechit parfaitement les ondes electromagnétiques. On citera comme exemple l'ionosphère (partie de l'atmosphère située à quelques centaines de kilomètres d'altitude qui est partiellement ionisée). Celle ci réflechit les ondes dont la fréquence est inférieure à quelques mégahertz.

densité en electrons libres de l'ionosphère : 10^{10} à 10^{12} electrons/m^3 ce qui correspond à des pulsations plasma de 6×10^6 à 6×10^7 rad s-1

Domaine des hautes fréquences : $\omega > \omega_p$

Dans ce domaine k^2 est positif, le nombre d'onde k est donc réel 'si l'on néglige la dissipation). L'onde se propage dans le plasma sans être atténuée avec un nombre d'onde :

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}. \tag{5.85}$$

On peut chercher à déterminer la vitesse de propagation v_φ

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}. \tag{5.86}$$

Cette vitesse est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide. Comment cela est il possible sans entrer en conflit avec la relativité ? Pour le savoir, il faut déterminer à quelle vitesse peut se propager l'énergie ou un signal. En ce qui concerne l'énergie, comme il y a de la matière la situation est plus délicate que dans le vide. Le plus simple est de regarder la propagation d'un signal.

Nous allons détailler deux cas : le premier concerne la superposition de deux ondes monochromatiques planes de pulsation différentes et le second un paquet d'ondes.

Propagation d'un battement entre deux ondes On considère la superposition de deux ondes se propageant selon $0z$ et polarisées selon Ox. La première a une pulsation ω_1 et un nombre d'onde k_1 tandisque la seconde a une pulsation ω_2 et un nombre d'onde k_2 . Ces deux ondes ont une même amplitude E_0

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= E_0\cos(k_1x-\omega_1t)\ \vec{u}_x + E_0\cos(k_2x-\omega_2t)\ \vec{u}_x & (5.87)\\ &= E_0\cos k_1(x-v_1t)\ \vec{u}_x + E_0\cos k_2(x-v_2t)\ \vec{u}_x & (5.88)\end{aligned}$$

les phase de chacune de ces deux ondes se propagent aux vitesses v_1 et v_2

$$v_1 = \frac{\omega_1}{k_1}, \qquad v_2 = \frac{\omega_2}{k_2}. \tag{5.89}$$

Si les deux ondes ont des pulsations proches : ($\omega_2 - \omega_1 = \delta\omega \ll \omega_1$) les deux nombres d'onde seront proches ($k_2 - k_1 = \delta k \ll k_1$). Les deux vitesses seront proches

On peut réexprimer le champ électrique de cette onde pour mettre en évidence les battements :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = 2E_0\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\ \vec{u}_x \tag{5.90}$$

Les oscillations rapides ont une pulsation qui est la moyenne des deux pulsations et un nombre d'onde qui est la moyenne des deux nombres d'onde. Ces oscillations rapides se propagent à une célérité v_r peux différente des célérités v_1 et v_2

$$v_r = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \simeq v_1 \simeq v_2. \tag{5.91}$$

L'enveloppe a une pulsation égale à la moitié de la différence des deux pulsations et un nombre d'onde égal à la moitié de différence des nombres d'ondes. Cette enveloppe se propage donc avec la célérité v_g

$$v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{\delta\omega}{\delta k} \tag{5.92}$$

Propagation d'un paquet d'onde Grâce à la transformée de Fourier on peut exprimer toute onde comme superposition d'ondes monochromatiques de pulsation ω et de vecteur d'onde k, ces deux quantités étant reliées par la relation de dispersion propre au milieu considéré. Cette relation permet d'exprimer le vecteur d'onde en fonction de la pulsation ou de manière équivalente la pulsation en fonction du nombre d'onde.

$$\vec{E}(z,t) = \int \frac{dk}{2\pi} \mathcal{E}(k) \exp\left[i(kz - \omega t)\right] \ \vec{u}_x \tag{5.93}$$

Supposons que les pulsations qui interviennent dans cette onde sont toutes proches de la pulsation ω_0

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r},t) &= \exp\left[i(k_0 z - \omega_0 t)\right] \int \frac{dk}{2\pi} \mathcal{E}(k_0) \exp\left[i\left((k-k_0)z - (\omega(k) - \omega(k_0))t\right)\right] \ \vec{u}_x && (5.94)\\
&= \exp\left[i(k_0 z - \omega_0 t)\right] \int \frac{dk}{2\pi} \mathcal{E}(k_0) \exp\left[i(k-k_0)\left(z - \left(\frac{\omega(k) - \omega(k_0)}{(k-k_0)}\right)t\right)\right] \vec{u}_x && (5.95)\\
&= \exp\left[i(k_0 z - \omega_0 t)\right] F(z - v_g t) \ \vec{u}_x && (5.96)
\end{aligned}$$

C'est une onde quasi monochromatique de pulsation ω_0 modulée par une enveloppe F

$$F(z) = \int \frac{dk}{2\pi} \mathcal{E}(k_0) \exp\left[i(k-k_0)z\right] \tag{5.97}$$

cette enveloppe se propage à la célérité

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(k v_\varphi) = v_\varphi + k\frac{dv_\varphi}{dk} \tag{5.98}$$

Si l'on développe la pulsation à l'ordre suivant, le terme supplémentaire conduit à un étallement du paquet d'onde.

Dans notre cas

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}. \tag{5.99}$$

$$dk = \frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}\omega d\omega \tag{5.100}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}1}. \tag{5.101}$$

La vitesse de groupe, c'est à dire la vitesse de propagation de l'énergie est plus faible que la vitesse de la lumière dans le vide. La causalité est sauvée !

6 Electromagnétisme des milieux

6.1 Introduction

Jusqu'à présent, les charges électriques étaient libres de se déplacer. Il s'agissait par exemple de charges isolées dans le vide, d'électrons et d'ions dans les plasmas ou des électrons de conduction dans les métaux. Pour étudier ce type de milieu, les outils adéquats étaient bien la densité de charge électrique et la densité de courant. Nous avons toutefois déjà dû introduire quelques nuances en distinguant les densité de charges et de courants associées aux électrons et les densités de charges et de courants associées aux ions. Même en les détaillant de la sorte, ces outils ne sont pas adaptés à l'étude générale des milieux

Ce n'est pas la situation générale, dans les atomes, les molécules ou la matière, les charges sont liées les unes aux autres. Les constituants de la matière courante sont individuellement neutres, tout en étant composés de particules chargées. Les propriétés électriques d'une molécule telle que l'eau sont correctement décrites non pas par une charge électrique ou la position de chacune des charges qui la composent mais par un moment dipolaire électrique. De même les propriétés magnétiques d'un atome ou d'une molécule sont décrites par un moment dipolaire magnétique.||

De la même manière que nous avons été conduits à introduire ces outils au niveau microscopique, il nous faut développer le même type d'outil à l'échelle macroscopique.

6.2 Moment dipolaire électrique : du microscopique au macroscopique.

6.2.1 Moment dipolaire électrique, polarisabilité

Rappels

Considérons un ensemble de charges. Placée dans un champ électrique $\vec{E}_0$ cette distribution de charges subit une force $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_0 \left(\vec{r}_i\right). \tag{6.1}$$

Dans le même temps, cette distribution de charge crée au point $\vec{R}$ le champ électrique suivant :

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R} - \vec{r}_i}{\left|\vec{R} - \vec{r}_i\right|^3} \tag{6.2}$$

On peut s'intéresser à ce que deviennent ces deux quantités lorsque ces charges sont situées dans un petit volume centré autour du point $\vec{r}_0$.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \delta\vec{r}_i \tag{6.3}$$

Plus précisément, si l'on note a la taille la distribution de charges, petit signifie ici petit devant la distance d'observation pour le champ créé par la distribution de charge, soit $a \ll R$ et petit devant la distance typique de variation du champ électrique pour le calcule de la force $a \ll \frac{|\vec{E}_0|}{|\vec{\nabla}\vec{E}_0|}$. Il est alors possible de réaliser un développement limité de ces deux expressions.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \sum_i q_i \vec{E}_0(\vec{r}_0) + \sum_i q_i \left(\delta\vec{r}_i \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \vec{E}_0\Big|_{\vec{r}_0} + \ldots & (6.4)\\ &= Q\ \vec{E}_0(\vec{r}_0) + \left(\vec{p}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{E}_0\Big|_{\vec{r}_0} + \ldots & (6.5)\end{aligned}$$

où l'on retrouve la charge totale Q et le moment dipôlaire électrique $\vec{p}$ qui sont définis comme suit

$$\begin{aligned} Q &= \sum_i q_i & (6.6)\\ \vec{p} &= \sum_i q_i \delta\vec{r}_i. & (6.7)\end{aligned}$$

On vérifiera que quand la charge totale est nulle, le moment dipolaire électrique ne dépend pas de l'origine choisie. On remarquera aussi que les deux termes ne sont que les premiers termes d'un développement limité que l'on peut poursuivre aux ordres suivants. Le développement effectué est nommé développement multipolaire, et au dela du dipôle, on trouve le quadrupole, l'octupole etc ...

Ces mêmes coefficients (charge, moment dipolaire, ...) interviennent dans l'expression du champ à grande distance d"une distribution de charges :

$$\begin{aligned} \vec{E}\left(\vec{R}\right) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{n}}{\left|\vec{R}-\vec{r}_0\right|^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{n})\vec{n}-\vec{p}}{\left|\vec{R}-\vec{r}_i\right|^3} + .. & (6.8)\\ \vec{n} &= \frac{\vec{R}-\vec{r}_0}{\left|\vec{R}-\vec{r}_0\right|} & (6.9)\end{aligned}$$

Si les charges sont en mouvement, on peut effectuer les mêmes discussion à partir du champ magnétique et attribuer à la distribution des moments multipôlaires magnétiques et en particulier le moment dipolaire magnétique $\vec{m}$ (sans oublier qu'il n'existe pas de charge magnétique, et que donc le développement multipolaire commence par le moment dipolaire magnétique)

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\sum_i q_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \tag{6.10}$$

Pour la suite, nous ne serons concernés que par la charge Q et les deux moments dipolaires $\vec{p}$ et $\vec{m}$.

Deux points sont essentiels :

– Une distribution de charges peut être représentée comme la superposition d'une charge ponctuelle, d'un dipôle électrique et d'un dipôle magnétique (et éventuellement de moments d'ordre supérieur)
– Chacune de ces quantités peut être représentée à l'aide d'un très petit nombre de charges ou de courants.

La charge électrique Q est représenté par une charge ponctuelle Q située au point $\vec{r}_0$

Le moment dipolaire électrique $\vec{p}$ est représenté par un charge positive q située au point $\vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}$ et une charge négative opposée $-q$ située au point $\vec{r}_0 - \frac{1}{2}\vec{a}$ avec $\vec{p} = q\vec{a}$ (ou éventuellement la charge positive en $\vec{r}_0 + \vec{a}$ et la charge négative en $\vec{r}_0$)

Le moment dipolaire magnétique $\vec{m}$ par une boucle de courant.

Toutes ces considérations restent valables lorsque l'on s'intéresse à des grandeurs qui dépendent du temps.

Notion de polarisabilité

Certaines molécules présentent spontanément un moment dipolaire électrique différent de zéro. Ce sont les molécules polaires telles la molécule d'eau. Les atomes ainsi que d'autres molécules présentent pas spontanément de moment dipolaire électrique. Toutefois, lorsque ces particules sont placées dans un champ électrique extérieur, celui ci exerce une force sur les charges positives et une force de sens opposé sur les charges négatives, de sorte que les barycentres des charges positives et des charges négatives ne sont plus superposés. L'atome acquiert ainsi un moment dipolaire électrique en général d'autant plus important que le champ électrique est intense.

$$\vec{p} = \vec{p}\left(\vec{E}\right) \tag{6.11}$$

En toute généralité, cette dépendance n'est pas linéaire ; toutefois, pour les champs faibles, on peut effectuer un développement en puissance de $\vec{E}$ et au premier ordre le terme linéaire s'écrit

$$\vec{p} = \alpha_0 \varepsilon_0 \vec{E}. \tag{6.12}$$

α est appelé polarisabilité électrique de la molécule ou de l'atome. On remarquera qu'en toute généralité, le moment dipolaire n'a aucune raison d'être aligné sur le champ électrique et que l'on écrira une relation matricielle

$$\tilde{\mathbf{p}} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E} \tag{6.13}$$

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \tag{6.14}$$

La polarisabilité α a la dimension d'un volume.

Tout ce raisonnement reste identique lorsque l'on se trouve dans un régime dépendant du temps. En régime sinusoïdal forcé on retrouve les mêmes relations entre les amplitudes complexes :

$$\underline{\vec{p}}\, e^{-i\omega t} = \alpha\,[\omega]\;\; \varepsilon_0\, \vec{\mathcal{E}}\; e^{-i\omega t}. \tag{6.15}$$

Dans ce type de relation, analogue à celle que l'on avait obtenu pour la conductivité électrique, la quantité $\alpha\,[\omega]$ n'est pas nécessairement réelle.

La polarisabilité statique α_0 ainsi que la polarisabilité dynamique $\alpha\,[\omega]$ sont des quantités physiques que l'on peut mesurer. Comme dans les conducteurs électriques, cette grandeur suffit à caractériser les interactions électromagnétiques de l'atome ou de la molécule (si l'on oublie les propriétés magnétiques). Dans une situation physique donnée, il suffit d'aller regarder la valeur mesurée dans les tables. Mais comme pour les conducteurs, un modèle microscopique est toujours instructif. Nous attendons de lui :

- Une image physique des phénomènes permettant de développer son intuition des phénomènes.
- La compréhension des comportements observés, par exemple la dépendance en fréquence de la polarisabilité
- La possibilité de donner des expressions analytiques qui soient plus que de simples ajustements ad-hoc des valeurs mesurées expérimentalement.

Le modèle que nous allons utiliser le plus souvent est appelé modèle de Lorentz ou encore modèle de l'électron élastiquement lié.

6.2.2 Modèles d'atomes

Notre objectif ici n'est pas de faire une théorie de la structure atomique (qui nécessite d'utiliser la mécanique quantique) Il s'agit de trouver un modèle phénoménologique qui rende compte le plus précisément possible et surtout le plus efficacement possible des toutes les propriétés physiques que nous serons amenées à rencontrer. Un fois ce modèle décrit, nous ferons le lien avec ce que l'on comprend aujourd'hui des atomes et des molécules.

L'électron élastiquement lié.

Dans le domaine statique, on cherche à rendre compte de la proportionnalité du dipôle en fonction du champ électrique. Sachant que la force exercée par un champ sur une charge est proportionnelle au champ, on peut obtenir un déplacement proportionnel au champ si l'on ajoute une force de rappel élastique. On considère donc comme modèle une charge q et une charge $-q$. On supposera la masse de la charge $-q$ beaucoup plus importante que celle de la charge q de sorte que son mouvement est négligeable. La charge q est située au point $\vec{r}$ tandis que la charge $-q$ négative reste à l'origine. La force exercée sur la charge positive est

$$\vec{F}_r = -k\vec{r} \tag{6.16}$$

pour l'instant k est un coefficient de raideur introduit "à la main". Il s'agit d'une force équivalente à celle d'un ressort.

On ajoutera de plus une force de frottement $\vec{F}_f$ visqueux

$$\vec{F}_f = -\Gamma \frac{d\vec{r}}{dt^2} \tag{6.17}$$

cette force est introduite elle aussi de manière phénoménologique. Elle vient rendre compte des pertes d'énergie de l'atome. Il s'agit en premier lieu de la dissipation par rayonnement. Il s'agit aussi d'autres mécanismes telles les collisions dans un gaz ou les interactions avec les vibrations du réseau cristallin dans un solide.

Dans un champ électrique, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{E} - k\vec{r} - \Gamma\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{6.18}$$

On en déduit dans le régime statique

$$\vec{r} = \frac{q}{k}\vec{E} \tag{6.19}$$

soit un moment dipolaire électrique $\vec{p}$

$$\vec{p} = \frac{q^2}{k}\vec{E} = \varepsilon_0\alpha_0\vec{E} \tag{6.20}$$

on en déduit l'expression du coefficient de raideur en fonction de la polarisabilité statique α_0 et de la charge de la particule

$$k = \frac{q^2}{\varepsilon_0\alpha_0}. \tag{6.21}$$

Que prévoit en plus ce modèle ? On se retrouve avec un oscillateur harmonique et donc d'une résonance à une pulsation propre.

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{k}{m}\vec{r} + \frac{q}{m}\vec{E} \tag{6.22}$$

soit une équation d'évolution pour le dipôle

$$\frac{d^2\vec{p}}{dt^2} + \frac{k}{m}\vec{p} = \frac{q^2}{m}\vec{E} \tag{6.23}$$

l'évolution libre se fait avec une pulsation propre ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{6.24}$$

On sait que les vrais atomes présentent des resonances ce résultat n'est donc finalement pas totalement surprenant.

On obtient ici une relation entre la raideur et la masse de la particule : Là encore si l'on suppose que la charge négative est un électron, on obtient une expression de la constante de raideur en fonction de la pulsation de resonance

$$k = m\omega_0^2. \tag{6.25}$$

On peut aussi calculer la dependance en fréquence de la polarisabilité

$$\alpha\left[\omega\right]=\alpha_0\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}=\alpha_0\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{6.26}$$

Cela donne dans la limite haute fréquence

$$\alpha\left[\omega\right]\sim\frac{\alpha_0\omega_0^2}{\omega^2}=\frac{q^2}{m}\frac{1}{\omega^2} \tag{6.27}$$

C'est à dire la même valeur que pour une charge libre.

Ce modèle donne donc deux relations entre les paramètres du modèle microscopiques (charge de la particule q, masse de la particule m et raideur de la liaison k) et les grandeurs physiques de notre atome (la polarisabilité α_0 et la pulsation de résonance ω_0)

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \tag{6.28}$$

$$\frac{k}{q^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\alpha_0}. \tag{6.29}$$

Tout cela est fort sympathique mais quel est le lien avec la réalité et quel sens peut on donner à cette liaison élastique entre deux charges électriques ?

Le modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène

Pour se donner une image plus concrète, commençons à revenir sur un modèle d'atome proposé par le physicien J.J. Thomson. Ce modèle a été proposé alors que l'on venait de découvrir l'électron, c'est à dire l'existence d'une charge ponctuelle. A l'époque, on ne connaissait pas encore le noyau atomique. Dans ce modèle, considère que la charge positive est répartie uniformément dans une sphère de rayon R_0 et que les électrons sont des particules ponctuelles tels des grains de raisin dans du pudding.

L'application du théorème de Gauss sur une sphère de rayon r permet de déterminer le champ électrique à l'intérieur de la distribution de charge positive :

$$4\pi r^2 E\left(r\right)=\frac{1}{\varepsilon_0}e\left(\frac{r}{R_0}\right)^3 \tag{6.30}$$

soit

$$E\left(r\right)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R_0^3} \tag{6.31}$$

il exerce donc sur l'électron une force de rappel

$$\vec{F}=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0^3}\vec{r}. \tag{6.32}$$

Il est donc tout à fait possible de concevoir une force de rappel élastique entre une distribution de charge positive et une charge négative, il suffit pour cela que les distributions ne soient pas ponctuelles. Dans ce modèle, la taille de l'atome est reliée à la polarisabilité statique et à la pulsation de resonance par les relations :

$$\alpha_0 = 4\pi R_0^3 \tag{6.33}$$

$$\omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R_0^3} \tag{6.34}$$

Petite remarque sur la taille R_0 de la distribution de charges positives. L'électron peut parcourir des cercles à l'intérieur de la sphère positivement chargée, ces orbites ont toujours la même pulsation ω_0 c'est en particulier le cas lorsque l'electron parcours des cercles de rayon R_0. On remarque que dans ce cas, le champ auquel il est soumis est le même que celui qu'il verrait si toute la charge etait au centre. Autrement dit si l'on prend pour pulsation une pulsation effectivement mesurée pour un atome, la taille que l'on trouve pour l'atome avec ce modèle est tout à fait comparable à la taille réelle de l'atome. Il en est de même si l'on considère la polarisabilité. Autrement dit, même si le modèle de Thomson est faux, il est étonnamment efficace.

En ce qui nous concerne, avant de le jeter nous retiendrons une leçons de ce modèle : il est possible de concevoir une distribution de charge où les forces électrostatiques produisent une force de rappel élastique.

L'atome d'hydrogène quantique

La mécanique quantique permet de comprendre la structure et le comportement de l'atome d'hydrogène. Celui ci est constitué d'un électron et d'un proton tous deux ponctuels. Dans un état stationnaire, ce système est décrit par une fonction d'onde. L'électron est délocalisé dans un nuage autour du noyau. On peut alors calculer la polarisabilité de cet atome lorsqu'il se trouve dans son état fondamental

$$\alpha_0 = 4\pi \frac{9}{2} a_0^3 \tag{6.35}$$

où a_0 est le rayon de Bohr

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \tag{6.36}$$

lorsque l'atome se trouve dans son niveau fondamental, il présente des résonances pour les pulsations ω_n suivantes :

niveaux d'énergie

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0} \tag{6.37}$$

les pulsations de résonance sont

$$\omega_n = \frac{1}{\hbar}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0} \tag{6.38}$$

$$\omega_n^2 = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e} \frac{m_e e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2} \frac{1}{a_0^2} \tag{6.39}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{a_0^3} \tag{6.40}$$

Soit en résumé une polarisabilité statique et des resonances

$$\alpha_0 = \frac{9}{2} \cdot 4\pi a_0^3 \tag{6.41}$$

$$\omega_n^2 = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{a_0^3} \tag{6.42}$$

On peut aussi calculer la dependance en fréquence de la polarisabilité on trouve

$$\alpha[\omega] = \alpha_0 \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \alpha_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{6.43}$$

$$\alpha[\omega] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \tag{6.44}$$

tout se passe comme si l'atome était représenté par une superposition linéaire d'oscillateurs. Les coefficients de pondération f_n sont appelés forces d'oscillateur. La limite haute fréquence donne

$$\alpha[\omega] = -\frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \tag{6.45}$$

on en déduit que la somme des forces d'oscillateurs est égale à 1 ou plus généralement au nombre d'électrons.

6.3 Milieux dielectriques

6.3.1 La densité de polarisation

Nous allons procéder avec les dipôles électriques comme nous l'avons fait avec les charges électriques lorsque certaines hypothèses sont vérifiées : .lorsque les charges sont nombreuses, réparties de manière homogène et que l'on s'intéresse à des phénomènes dont l'échelle de longueur est bien plus grande que la distance entre les charges. On décrit alors le milieu avec des grandeurs continues : densité volumique de charges et densité de courant.

$$\rho = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i \in \mathcal{V}} q_i \tag{6.46}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i \in \mathcal{V}} q_i \vec{v}_i. \tag{6.47}$$

Considérons une collection d'atomes neutres ou de molécules β composé de charges $q_{\beta,i}$. situées aux points $\vec{r}_{\beta,i}$. Chaque atome ou molécule est neutre possède un dipôle électrique :

$$Q_\beta = \sum_i q_{\beta,i} = 0 \tag{6.48}$$

$$\vec{p}_\beta = \sum_i q_{\beta,i} \vec{r}_{\beta,i} \tag{6.49}$$

On peut alors définir une densité volumique de moment dipôlaire électrique $\vec{P}$ aussi appelé vecteur polarisation

$$\vec{P} = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\beta \in \mathcal{V}} \vec{p}_\beta = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\beta, i \in \mathcal{V}} q_{\beta,i} \vec{r}_{\beta,i}. \tag{6.50}$$

Lorsque les charges composant ces dipôles sont en mouvement elles crée une densité volumique de courant

$$\vec{j}_P = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\beta, i \in \mathcal{V}} q_{\beta,i} \frac{d\vec{r}_{\beta,i}}{dt} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{6.51}$$

Ce courant est appelé courant de polarisation. Si ce courant n'est pas uniforme, les charges peuvent s'accumuler et créer une densité volumique de charge ρ_P. Ecrivons la relation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{j}_P = 0. \tag{6.52}$$

soit

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \mathrm{div}\ \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0. \tag{6.53}$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_P + \mathrm{div}\ \vec{P} \right) = 0. \tag{6.54}$$

On en déduit la relation entre la densité volumique de dipôles et la densité volumique de charges associée

$$\rho_P = -\mathrm{div}\ \vec{P} \tag{6.55}$$

6.3.2 Milieux dielectriques linéaires

Lorsque l'on place un atome ou une molécule dans un champ électrique, il se polarise sous son effet. Dans le régime linéaire, le dipôle crée est proportionnel au champ appliqué. Ce type de relation microscopique se retrouve au niveau macroscopique. De manière générale

$$\vec{P} = \vec{P} \left(\vec{E} \right) \tag{6.56}$$

et dans le régime linéaire (on considère tout de suite le régime monochromatique et l'amplitude complexe)

$$\vec{\mathcal{P}} = \varepsilon_0 \chi \left[\omega \right] \vec{\mathcal{E}} \tag{6.57}$$

le coefficient de proportionnalité $\chi[\omega]$ est appelé susceptibilité électrique du milieu.

Lorsque le milieu est composé d'atomes ou de molécules de polarisabilité $\alpha[\omega]$ on peut relier la polarisabilité microscopique à la susceptibilité macroscopique si le milieu est dilué. (L'hypothèse de milieu dilué vise à assurer que le champ vu par l'atome est bien le champ extérieur appliqué. Si le milieu est dense, le champ vu par chaque atome est la somme du champ extérieur et du champ créé par les autres dipôles voisins appelé champ local, la relation microscopique macroscopique est alors moins directe). Si le milieu est dilué :

$$\vec{P} = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\beta \in \mathcal{V}} \vec{p}_\beta = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\beta \in \mathcal{V}} \varepsilon_0 \alpha [\omega] \vec{\mathcal{E}} = \varepsilon_0 N \alpha [\omega] \vec{\mathcal{E}} \tag{6.58}$$

où N est la densité volumique d'atomes. La susceptibilité est donc

$$\chi [\omega] = N \alpha [\omega] \tag{6.59}$$

6.3.3 Milieux magnétiques

On peut traiter de la même manière les milieux magnétiques et introduire un vecteur magnétisation $\vec{M}$ qui correspond à une densité volumique de moments magnétiques.

$$\vec{j}_M = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{M} \tag{6.60}$$

6.4 Equations de Maxwell dans les milieux

6.4.1 Le vecteur déplacement électrique

Considérons un milieu réel. Certaines charges sont libres de se déplacer tandis que d'autres sont liées entre elles pour former atomes et molécules. On peut donc distinguer deux contributions dans la densité volumique de charges. Une contribution dûe aux charges libres (ρ_l et $\vec{j}_l$) que l'on traite comme usuellement et une contribution des charges liées(ρ_P et $\vec{j}_P$) que l'on va décrire en terme de distribution volumique de dipôles

$$\rho = \rho_l + \rho_P = \rho_l - \text{div}\ \vec{P} \tag{6.61}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_l + \vec{j}_P = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{6.62}$$

Reportons ces deux expressions dans les deux équations de Maxwell où interviennent la densité de charge et la densité de courant. Il s'agit de l'équation de Maxwell Gauss

$$\text{div}\ \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho_l - \text{div}\ \vec{P} \right) \tag{6.63}$$

et de l'équation de Mawell Ampère

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_l + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{6.64}$$

Que l'on peut finalement réecrire

$$\text{div}\ \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) = \rho_l \tag{6.65}$$

et

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_l + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right). \tag{6.66}$$

On introduit donc le vecteur $\vec{D}$ appelé déplacement électrique

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{6.67}$$

on peut procéder de la même manière avec le champ magnétique et introduire le vecteur $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}. \tag{6.68}$$

6.4.2 Les équations de Maxwell

On peut donc réecrire les équations de Maxwell en faisant intervenir les vecteurs $\vec{D}$ et $\vec{H}$.

L'équation de Maxwell Gauss

$$\text{div } \vec{D} = \rho_l \tag{6.69}$$

L'équation de Maxwell flux magnétique

$$\text{div } \vec{B} = 0 \tag{6.70}$$

L'équation de Maxwell Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{6.71}$$

L'équation de Maxwell Ampère

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{H} = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{6.72}$$

avec

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{6.73}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}. \tag{6.74}$$

6.4.3 Milieux linéaires isotropes homogènes

Dans les milieux isotropes diélectriques homogènes linéaires, le déplacement électrique est proportionnel au champ électrique tandis que le champ magnétique et l'induction magnétique sont aussi proportionnels l'un à l'autre.

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \tag{6.75}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \tag{6.76}$$

ces relations de proportionnalité sont aussi vraies pour la polarisation et la magnétisation

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \tag{6.77}$$

soit

$$\varepsilon_r = 1 + \chi = 1 + N\alpha \tag{6.78}$$

6.5 Propagation dans les milieux linéaires isotropes homogènes

Dans un milieu diélectrique sans charges libres (ni courants libres) les équations de Maxwell sont les suivantes :

$$\text{div } \vec{D} = 0 \tag{6.79}$$
$$\text{div } \vec{B} = 0 \tag{6.80}$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{6.81}$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{6.82}$$

Pour les milieux diélectriques linéaires homogènes, les champs $\vec{D}$ et $\vec{H}$ sont proportionnels aux champs électriques et magnétiques avec un coefficient de proportionnalité indépendant de la position.

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{6.83}$$
$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}. \tag{6.84}$$

Dans ces milieux, les équations de Maxwell ont exactement la même forme que dans le vide, à la seule différence que les permittivités et perméabilités n'ont pas les valeurs qu'elles ont dans le vide. Considérons d'emblée des solutions de type ondes planes progressives en notation complexe :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re\left(\vec{\mathcal{E}}_0\ e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right) \tag{6.85}$$
$$B(\vec{r}, t) = \Re\left(\vec{\mathcal{B}}_0\ e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right) \tag{6.86}$$

$$i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}_0 = 0 \tag{6.87}$$
$$i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{B}}_0 = 0 \tag{6.88}$$
$$i\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}_0 = -\left(-i\omega\vec{\mathcal{B}}_0\right) \tag{6.89}$$
$$i\vec{k}\times\vec{\mathcal{B}}_0 = \varepsilon\mu\left(-i\omega\vec{\mathcal{E}}_0\right). \tag{6.90}$$

Les conclusions sont similaires à celles que l'on obtient dans le vide :

$$\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}_0 = 0 \tag{6.91}$$
$$\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{B}}_0 = 0 \tag{6.92}$$
$$\vec{\mathcal{B}}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{\mathcal{E}}_0 \tag{6.93}$$

Les ondes électromagnétiques sont transverses, c'est à dire que le champ électrique et le champ magnétique sont orthogonaux au vecteur d'onde et orthogonaux entre eux. La relation de dispersion est

$$k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 \tag{6.94}$$

Si la permittivité et la perméabilité sont des grandeurs réelles, on a une situation identique à celle que l'on a dans le vide : des ondes planes progressives qui se propagent à une célérité $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ On définit l'indice optique comme le rapport de la vitesse de la lumière et de la vitesse de propagation

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \tag{6.95}$$

Dans le cas général, la permittivité peut être complexe, le nombre d'onde est donc complexe :

$$k = k_r + ik_i \tag{6.96}$$

On choisira pour le nombre d'onde k la racine de partie réelle positive. Si l'on prend pour exemple un vecteur d'onde dirigé selon $0z$

$$\vec{E} = \Re\left(\vec{\mathcal{E}}_0 \ \exp i\left(\left(k_r + ik_i\right)z - \omega t\right)\right) \tag{6.97}$$

$$= \vec{E}_0 \ e^{-k_r z}\cos\left(k_i z - \omega t + \varphi\right) \tag{6.98}$$

il s'agit d'une onde plane qui se propage à la célérité $v = \frac{\omega}{k_i}$ tout en s'atténuant (si k_r est positif) ou en s'amplifiant (si k_r est négatif).

6.6 Réflexion et transmission

6.6.1 Présentation

On aborde ici un aspect des milieux inhomogènes : que se passe-t-il lorsqu'une onde arrive à l'interface entre deux milieux ? On considérera ici une interface plane entre un premier milieu 1 situé dans le demi espace $z > 0$ et un second milieu 2 situé dans le demi-espace $z < 0$.

6.6.2 Relations de continuité

Pour analyser ce problème, il nous faut analyser ce que donnent les équations de Maxwell à l'interface des deux milieux. On obtient alors ce que l'on nomme relations de continuité. On notera de l'indice 1 les champs en $z = 0^+$ c'est à dire dans le milieu 1 juste au dessus de l'interface et de l'indice 2 les champs en $z = 0^-$. Ces relations sont :

$$\vec{D}_{N2} - \vec{D}_{N1} = \sigma\vec{n}_{12} \tag{6.99}$$

$$\vec{B}_{N2} - \vec{B}_{N1} = 0 \tag{6.100}$$

$$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = 0 \tag{6.101}$$

$$\vec{H}_{T2} - \vec{H}_{T1} = \vec{j}_S \times \vec{n}_{12} \tag{6.102}$$

les indices N et T correspondent aux composantes du champ normales à la surface et tangentielles. σ et $\vec{j}_S$ sont des densités surfaciques de charge et de courant $\vec{n}_{12}$ est la normale à la surface dirigée du milieu 1 vers le milieu 2.

On suppose maintenant d'une part que chacun de ces milieux est homogène et isotrope et d'autre part qu'il n'y a aucune charge libre de surface ni courant libre de surface. Ces équations deviennent alors

$$\varepsilon_2 \vec{E}_{N2} - \varepsilon_1 \vec{E}_{N1} = 0 \quad (6.103)$$

$$\vec{B}_{N2} - \vec{B}_{N1} = 0 \quad (6.104)$$

$$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = 0 \quad (6.105)$$

$$\frac{1}{\mu_2}\vec{B}_{T2} - \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_{T1} = 0. \quad (6.106)$$

On considérera dans la suite que les perméabilités magnétiques sont identiques et donc que $\mu_1 = \mu_2$

6.6.3 Ondes réfléchies et transmises

On a au total trois ondes planes progressives : l'onde incidente (indice i), l'onde réfléchie (indice r) et l'onde transmise (indice t) Ces trois ondes correspondent à un champ électrique

$$\vec{\mathcal{E}}_\alpha = \vec{\mathcal{E}}_{\alpha 0} e^{i\left(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t\right)} \quad (6.107)$$

où α correspond à chacun des indices i, r et t. Pour chacune de ces ondes, le champ magnétique est

$$\vec{\mathcal{B}}_\alpha = \vec{\mathcal{B}}_{\alpha 0} e^{i\left(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t\right)} \quad (6.108)$$

$$= \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{\mathcal{E}}_{\alpha 0} e^{i\left(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t\right)} = \frac{n}{c}\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{\mathcal{E}}_{\alpha 0} e^{i\left(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t\right)}. \quad (6.109)$$

Dans le milieu 1 ($z > 0$) le champ est la superposition de l'ondes incidente et de l'onde réfléchie. Dans le milieu 2 seule l'onde transmise est présente. Les nombres d'ondes (c'est à dire les modules des vecteurs d'ondes) sont reliés à la pulsation par

$$k_\alpha = n_\alpha \frac{\omega}{c} = n_\alpha k_0 \quad (6.110)$$

où k_0 est le nombre d'onde d'une onde de même pulsation dans le vide.

Prenons l'une des relations de continuité, par exemple : $\vec{E}_{T2} = \vec{E}_{T1}$. Si l'on exprime explicitement les champs en un point $\vec{r}_0$ de l'interface, cette relation devient :

$$\vec{\mathcal{E}}_{i0T} e^{i\left(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_0 - \omega t\right)} + \vec{\mathcal{E}}_{r0T} e^{i\left(\vec{k}_r \cdot \vec{r}_0 - \omega t\right)} = \vec{\mathcal{E}}_{t0T} e^{i\left(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_0 - \omega t\right)} \quad (6.111)$$

Ou encore, si l'on explicite la position du point $\vec{r}_0$, soit $\vec{r}_0 = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$

$$\vec{\mathcal{E}}_{i0T} e^{i(k_{ix}x + k_{iy}y - \omega t)} + \vec{\mathcal{E}}_{t0T} e^{i(k_{rx}x + k_{ry}y - \omega t)} = \vec{\mathcal{E}}_{t0T} e^{i(k_{tx}x + k_{ty}y - \omega t)} \quad (6.112)$$

pour que cette relation puisse-t-être vérifiée quelque soit les points x et y, les vecteurs d'ondes ce ces trois ondes selon x et y doivent être égaux :

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} \quad (6.113)$$

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}. \quad (6.114)$$

Choisissons maintenant les axes de sorte que le plan d'incidence, c'est à dire le plan qui contient les trois vecteurs d'onde, est le pla $x0z$. Dans ce cas $k_{\alpha y}=0$ Si l'on note θ_i, θ_r et θ_t les angles d'incidence, de reflexion et de transmision la composante du vecteur d'onde parallèle à l'interface est

$$k_{\alpha x}=k_\alpha \sin\theta_\alpha \tag{6.115}$$

Ecrivons l'égalité des composantes selon x des trois vecteurs d'onde :

$$\begin{aligned} k_{ix} &= k_{rx}=k_{tx} && (6.116)\\ k_i\sin\theta_i &= k_r\sin\theta_r=k_t\sin\theta_t && (6.117)\end{aligned}$$

ce qui donne, si l'on relie les nombres d'onde au nombre d'onde dans le vide

$$n_1k_0\sin\theta_i=n_1k_0\sin\theta_r=n_2k_0\sin\theta_t \tag{6.118}$$

on retrouve ainsi les lois de Descartes pour la reflexion et la refraction

$$\begin{aligned} \theta_i &= \theta_r && (6.119)\\ n_1\sin\theta_r &= n_2\sin\theta_t. && (6.120)\end{aligned}$$

Que vaut la composante du vecteur d'onde transmis selon $0z$:

$$k_t^2=k_{tx}^2+k_{tz}^2 \tag{6.121}$$

soit

$$k_{tz}^2=k_t^2-k_{tx}^2=k_0^2\left(n_2^2-n_1^2\sin^2\theta_i\right) \tag{6.122}$$

Si $n_2>n_1\sin\theta_i$, k_{tz}^2 est positif et donc k_z est réel

Si $n_2<n_1\sin\theta_i$, k_{tz}^2 est négatif et donc k_z est imaginaire pur : il n'y a pas d'onde plane transmise. On a dans le milieu 2 une onde évanescente. On déduit de conditions énergétiques que la réflexion est totale. Ce phénomène apparaît lorsque $n_2<n_1$ pour un angle supérieur à l'angle critique θ_c qui vérifie

$$\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1} \tag{6.123}$$

6.6.4 Formules de Fresnel

Cherchons maintenant à déterminer les coefficients de réflexion et de transmission. Écrivons les relations de passage pour le champ tangeant :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{T2} &= \vec{E}_{T1} && (6.124)\\ \vec{B}_{T2} &= \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_{T1} && (6.125)\end{aligned}$$

Comme les phases des ondes sont égales en tout point de l'interface, il suffit d'écrire les égalités pour les amplitudes :

$$\vec{\mathcal{E}}_{i0T}e^{i\left(\vec{k}_i\cdot\vec{r}_0-\omega t\right)}+\vec{\mathcal{E}}_{r0T}e^{i\left(\vec{k}_r\cdot\vec{r}_0-\omega t\right)}=\vec{\mathcal{E}}_{t0T}e^{i\left(\vec{k}_i\cdot\vec{r}_0-\omega t\right)} \tag{6.126}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{ix} + \mathcal{E}_{rx} &= \mathcal{E}_{tx} && (6.127)\\
\mathcal{E}_{iy} + \mathcal{E}_{ry} &= \mathcal{E}_{ty} && (6.128)\\
\mathcal{B}_{ix} + \mathcal{B}_{rx} &= \mathcal{B}_{tx} && (6.129)\\
\mathcal{B}_{iy} + \mathcal{B}_{ry} &= \mathcal{B}_{ty} && (6.130)
\end{aligned}$$

Onde incidente polarisée perpendiculairement au plan d'incidence

Le champ électrique est selon 0_y. Le champ magnétique est dans le plan $x0z$ et les amplitudes sont

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{ix} &= -\mathcal{B}_i \cos\theta_i && (6.131)\\
\mathcal{B}_{rx} &= \mathcal{B}_r \cos\theta_r && (6.132)\\
\mathcal{B}_{tx} &= -\mathcal{B}_t \cos\theta_t && (6.133)
\end{aligned}$$

Les relations de continuité sont donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r &= \mathcal{E}_t && (6.134)\\
-\mathcal{B}_i \cos\theta_i + \mathcal{B}_r \cos\theta_r &= -\mathcal{B}_t \cos\theta_t && (6.135)
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r &= \mathcal{E}_t && (6.136)\\
n_1 \cos\theta_i \left(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_r\right) &= n_2 \mathcal{E}_t \cos\theta_t && (6.137)
\end{aligned}$$

On défini alors les coefficients de reflexion et de transmission par

$$\begin{aligned}
r_\perp &= \frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} && (6.138)\\
t_\perp &= \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i}. && (6.139)
\end{aligned}$$

Ces coefficients vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
1 + r_\perp &= t_\perp && (6.140)\\
n_1 \cos\theta_i \left(1 - r_\perp\right) &= -n_2 t_\perp \cos\theta_t && (6.141)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
r_\perp &= \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} && (6.142)\\
t_\perp &= \frac{2 n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} && (6.143)
\end{aligned}$$

Onde incidente polarisée parallèlement au plan d'incidence

Les rôles des champs électrique et magnétique sont inversé. Attention les trièdres doivent rester direct et on cherche à ce que les notations restent cohérentes avec le cas précédent pour un angle d'incidence nul.

Le champ magnétique est selon 0_y. Le champ magnétique est dans le plan $x0z$ et les amplitudes sont

$$\mathcal{E}_{ix} = \mathcal{E}_i \cos\theta_i \tag{6.144}$$
$$\mathcal{E}_{rx} = \mathcal{E}_r \cos\theta_r \tag{6.145}$$
$$\mathcal{E}_{tx} = \mathcal{E}_t \cos\theta_t \tag{6.146}$$

Les relations de continuité sont donc

$$\mathcal{E}_i \cos\theta_i + \mathcal{E}_r \cos\theta_r = \mathcal{E}_t \cos\theta_t \tag{6.147}$$
$$-\mathcal{B}_i + \mathcal{B}_r = -\mathcal{B}_t \tag{6.148}$$

Soit

$$\cos\theta_i \left(\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r\right) = \mathcal{E}_t \cos\theta_t \tag{6.149}$$
$$n_1 \left(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_r\right) = n_2 \mathcal{E}_t \tag{6.150}$$

On défini alors les coefficients de reflexion et de transmission par

$$r_\parallel = \frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} \tag{6.151}$$
$$t_\parallel = \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i}. \tag{6.152}$$

Ces coefficients vérifient les équations suivantes :

$$\cos\theta_i \left(1 + r_\parallel\right) = \cos\theta_t t_\parallel \tag{6.153}$$
$$n_1 \left(1 - r_\parallel\right) = n_2 t_\parallel \tag{6.154}$$

On en déduit

$$r_\parallel = \frac{n_1 \cos\theta_t - n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i} \tag{6.155}$$
$$t_\parallel = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} \tag{6.156}$$

6.6.5 Discussion physique

Incidence normale

Dans le cas de l'incidence normale il n'y a pas de distinction selon la polarisation

$$r_\perp = r_\parallel = r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{6.157}$$
$$t_\perp = t_\parallel = t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \tag{6.158}$$

La polarisation reste la même à la réflexion et à la transmission.

Lorsque l'indice du milieu sur lequel on se reflechit est plus grand que l'indice du milieu dans lequel se propage l'onde incidente, le coefficient de reflexion est négatif, c'est à dire qu'il y a un déphasage de π. Ce déphasage est nul si le milieu sur lequel on se reflechit est d'indice inférieur.

Pour une interface air verre le coefficient de reflexion est

$$r = \frac{1-1,5}{1+1,5} = -0,2 \tag{6.159}$$

c'est un coeffcient de reflexion en amplitude. SI l'on s'interesse à la puissance, c'est à dire au vecteur de Poynting il faut prendre le carré soit

$$R = |r|^2 = 0,04 \tag{6.160}$$

4% de la puissance lumineuse est réfléchie. Si l'on s'intéresse à une vitre, c'est à dire deux interfaces, la puissance réfléchie est 8% de la puissance incidente.

Incidence oblique pour $n_2 > n_1$

Dans ce cas le vecteur d'onde selon z est toujours réel.

Les coefficients de réflexion des composantes de la polarisation du champ parallèle et perpendiculaires au plan d'incidence sont différents, il y a donc un changement de polarisation à la réflexion.

Le coefficient de réflexion tend vers 1 lorsque l'on se rapproche d'une incidence rasante.

Le coefficient de réflexion de la polarisation parallèle au plan d'incidence $r_\parallel$ s'annule pour une certaine valeur de l'angle d'incidence appelé angle de Brewster.θ_{Bi}

$$n_2 \cos\theta_i = n_1 \cos\theta_t \tag{6.161}$$

on multiplie par $\sin\theta_t$

$$\begin{aligned} n_2 \sin\theta_t \cos\theta_i &= n_1 \sin\theta_t \cos\theta_t && (6.162) \\ \sin\theta_i \cos\theta_i &= \sin\theta_t \cos\theta_t && (6.163) \\ \sin 2\theta_i &= \sin 2\theta_t && (6.164) \end{aligned}$$

Soit

$$2\theta_i = 2\theta_t \tag{6.165}$$

ou

$$\pi - 2\theta_i = 2\theta_t \tag{6.166}$$

soit

$$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2} \tag{6.167}$$

L'angle de Brewster est l'angle pour lequel l'onde réfléchie et l'onde transmise sont perpendiculaires.

$$n_2 \cos\theta_i = n_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) \tag{6.168}$$

ou encore

$$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}. \tag{6.169}$$

Incidence oblique pour $n_1 > n_2$ et $\theta_i < \theta_l$

Dans ce cas le vecteur d'onde selon z est toujours réel. Les propriétés sont similaires au cas précédent :

Les coefficients de réflexion des composantes de la polarisation du champ parallèle et perpendiculaires au plan d'incidence sont différents, il y a donc un changement de polarisation à la réflexion.

Le coefficient de réflexion tend vers 1 lorsque l'on se rapproche de l'angle critique.

On a aussi un angle de Brewster

$$\tan \theta_B = \frac{n_1}{n_2}. \tag{6.170}$$

Incidence oblique pour $n_1 > n_2$ et $\theta_i > \theta_l$: réflexion totale

Dans ce cas le vecteur d'onde selon z est imaginaire. On peut utiliser les mêmes formules que précédemment en utilisant les égalités suivantes

$$k_{tz} = k_t \cos \theta_t \tag{6.171}$$

or

$$k_{tz}^2 = k_0^2 \left(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i\right) \tag{6.172}$$

cela donne

$$\cos^2 \theta_t = \left(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i\right) \tag{6.173}$$

on a donc les mêmes formules avec $\cos \theta_t$ imaginaire. Le module du coefficient de réflexion est 1 . La réflexion déphase l'onde.