

**Licence de physique, parcours Physique appliquée aux Sciences de la Vie et de la Planète**  
Année 2005-2006

# **RESULTATS de MESURES et PRECISION**

Fascicule à lire avant de commencer les Travaux Pratiques

# Sommaire

I Introduction .....	3
II Qu'est-ce qu'une mesure ? .....	3
1. La mesure.....	3
2. La validité de la mesure .....	3
3. La précision de la mesure .....	4
III Notion d'incertitude.....	4
1 Exemple .....	4
a. L'erreur grossière de manipulation : .....	4
b. L'erreur aléatoire : .....	5
c. L'erreur systématique : .....	5
2 Erreur et incertitude : définitions.....	6
a. Erreur .....	6
b. Incertitude .....	7
c. Incertitude relative .....	7
d. Présentation des résultats numériques .....	7
IV Le calcul des incertitudes .....	8
1 Estimation numérique de l'incertitude .....	8
2 Calcul général .....	8
3 Erreur sur un produit ou un quotient .....	9
V Les séries de mesures et les statistiques .....	10
1 Statistiques sur une grandeur .....	10
2. Tracé de courbes .....	10

*Les textes écrits en italique sont des exemples.*

## I Introduction

L'objectif des travaux pratiques est en général de vérifier sur des expériences concrètes des lois physiques. Après une familiarisation avec les instruments et des expériences qualitatives, il s'agit donc de faire des mesures précises avec une démarche scientifique logique et rigoureuse. Cette démarche scientifique est expliquée dans les photocopiés qui présentent les expériences, elle doit être bien précisée dans le compte-rendu pour expliquer et justifier les résultats obtenus.

*Comment un lecteur du compte-rendu d'expérience de la mesure d'un pouvoir rotatoire peut-il interpréter l'angle obtenu s'il ignore le schéma optique réalisé par l'expérimentateur ? Le photocopié propose un montage optique, mais il est important de représenter dans le compte-rendu le schéma de l'expérience effectivement réalisée.*

Suivant les cas les mesures réalisées ont pour objet la mesure d'une constante fondamentale (*la masse de l'électron*) ou d'une constante qui peut dépendre des paramètres de l'expérience (*la vitesse du son dépend du milieu traversé et de la température*), ou la vérification d'une loi (*dispersion angulaire d'un réseau en fonction de la longueur d'onde*).

## II Qu'est-ce qu'une mesure ?

### 1. La mesure

Le résultat d'une mesure s'exprime par un nombre suivi du nom ou du symbole d'une unité.

*Soit  $f$  la distance focale d'une lentille,  $f = 15 \text{ cm}$  est la valeur pour une lentille donnée.*

### 2. La validité de la mesure

Une mesure n'a pas de signification par elle-même, elle doit toujours être précisée dans le contexte de l'expérience réalisée.

*La valeur de  $15 \text{ cm}$  peut être celle fournie par le fabricant et inscrite sur la monture de la lentille, elle peut être le résultat d'une mesure faite à l'aide d'un montage par auto-collimation ou d'un montage utilisant la méthode de Silbermann.*

On imagine facilement que la précision obtenue sur le résultat dépend de la méthode employée pour faire la mesure. Dans tous les cas l'expérimentateur doit s'assurer de la validité de sa mesure. La première démarche consiste à vérifier l'ordre de grandeur obtenu :

*La longueur d'onde d'une lumière visible à l'œil est forcément comprise entre  $400$  et  $700 \text{ nm}$ , l'épaisseur du bloc de plexiglas qu'on peut prendre dans la main est de quelques  $\text{cm}$ .*

Plusieurs moyens existent ensuite pour contrôler la mesure. Pour les constantes fondamentales ou des constantes bien connues, il existe des tables auxquelles on peut se référer et les valeurs en sont reportées dans le photocopié :

*"Mesurer avec le réseau la longueur d'onde de la raie rouge du Cadmium ( $643,8 \text{ nm}$ )" signifie clairement qu'il faut comparer la valeur déduite de l'expérience avec la valeur donnée.*

Dans beaucoup d'expériences, une contre-mesure est possible : si deux méthodes différentes donnent des valeurs voisines, il est probable que le résultat obtenu est correct :

*La mesure de la constante de temps  $\tau$  d'un circuit résistance-condensateur peut être rapprochée des valeurs de la résistance (R) et de la capacité (C) mises dans le circuit ( $\tau = RC$ ).*

### **3. La précision de la mesure**

Toute mesure effectuée à l'aide d'un appareil donne un résultat qui n'est jamais rigoureusement la valeur vraie de la grandeur à mesurer. Même en l'absence de précision donnée explicitement sur un résultat, la simple valeur numérique sous-entend une précision par le seul nombre de chiffres significatifs indiqués. Les chiffres donnés sont ceux qui ont du sens, ce qui signifie que le chiffre suivant n'aurait pas de sens dans le contexte de la mesure effectuée.

*$f = 15 \text{ cm}$  signifie  $14,5 \text{ cm} \leq f \leq 15,5 \text{ cm}$ , on ne connaît pas le résultat au mm près.*

*$f = 15,0 \text{ cm}$  signifie  $14,95 \text{ cm} \leq f \leq 15,05 \text{ cm}$ .*

La machine à calculer donnant des résultats avec beaucoup de décimales, il est important de toujours se poser la question de savoir si ces chiffres ont un sens.

*Une mesure qui est un rapport  $5/2$  donnera 2,5 ; si le rapport est  $5/3$  on obtiendra 1,66666667. La seconde mesure est-elle pour autant plus précise ? Si les deux mesures ont la même précision, on doit écrire le même nombre de chiffres significatifs.*

*Par exemple, si la précision est de 0,1, on écrira 2,5 et 1,7. Si elle est de 0,01, on écrira 2,50 et 1,67.*

## **III Notion d'incertitude**

### **1 Exemple**

*Considérons l'exemple simple de la mesure de la longueur d'un objet avec une règle. Supposons que cette règle soit graduée en cm et mm, la mesure sera faite au mm près.*

Quelles sont les erreurs qui peuvent être faites sur une telle mesure ?

Ces erreurs peuvent être de nature différente et elles sont illustrées sur les graphiques ci-dessous (figures 1 et 2) qui présentent des résultats de mesure. Pour plus de clarté, la valeur « vraie » a été reportée sur chaque graphique. Dans la réalité, cette valeur est souvent inconnue (sinon on ne ferait pas la mesure...). On supposera ici que sa valeur a été déterminée par ailleurs par une méthode beaucoup plus précise.

#### **a. L'erreur grossière de manipulation :**

*Cette erreur fera aligner l'extrémité de l'objet sur le 1 au lieu du 0.*

Une telle erreur est repérable en refaisant l'expérience. La mauvaise mesure sera alors retirée du tableau de résultats (figure 1).

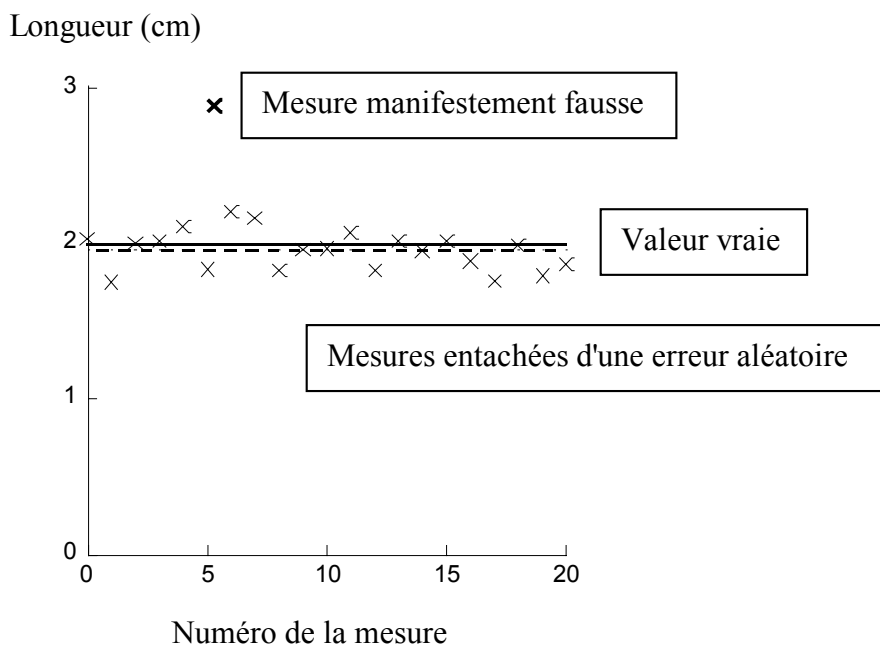
**b. L'erreur aléatoire :**

C'est l'erreur inévitable liée à l'ajustement de l'objet devant la règle, à la vision de l'expérimentateur et à la précision de l'instrument. Si on effectue plusieurs fois la même mesure, on trouve des valeurs proches mais pas nécessairement identiques (figure 1).

*Pour une règle dont les graduations sont tous les mm, cette erreur est en principe de l'ordre du mm. Si on utilisait une règle graduée tous les demi-cm, elle serait de l'ordre du demi-cm.*

Le calcul de la moyenne des mesures effectuées permet d'obtenir une estimation de la valeur vraie (voir chapitre IV).

*Dans le cas présenté sur la figure 1, la moyenne des 20 mesures effectuées (en excluant le point grossièrement faux) donne une moyenne de 1,95 (en trait pointillé), proche de la valeur vraie mais pas nécessairement identique.*



**figure 1. Résultats de plusieurs mesures d'une longueur dont la valeur « vraie » vaut 2 cm. Une des mesures est fautive (plus proche de 3 que de 2). En répétant la mesure on se rend compte que toutes les mesures sont autour de 2 et qu'il faut supprimer ce point faux.**

**c. L'erreur systématique :**

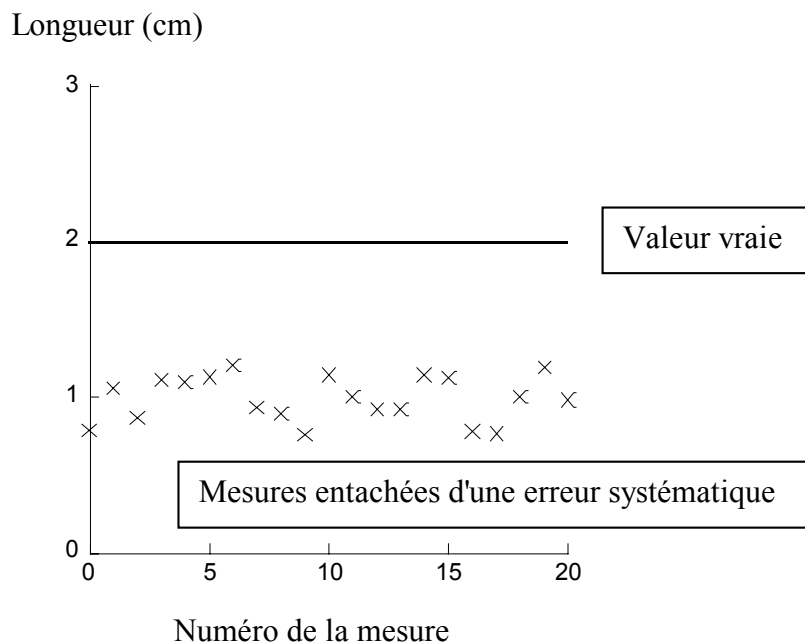
*Dans l'expérience de lecture sur une règle, ce peut être une erreur due à la parallaxe liée à une observation en biais de la graduation. Cette erreur fera décaler systématiquement la mesure d'une graduation à chaque fois.*

*Pour les mesures présentées sur la figure 2, on constate qu'aucune des mesures effectuées ne s'approche de la valeur attendue. Si on ne connaît pas cette valeur, on peut croire au vu des mesures qu'elle vaut 1 et non 2. Le seul moyen de se rendre compte de cette erreur systématique est l'analyse du résultat, en réfléchissant à la valeur qu'on s'attend à trouver à partir des différents éléments de l'expérience. Dans l'exemple d'une mesure de longueur de l'ordre du cm que nous*

avons pris ici, c'est le bon sens et l'habitude qui permettent de se rendre compte que l'ordre de grandeur mesuré n'est pas le bon.

Une telle erreur peut souvent être évitée en appliquant un protocole expérimental soigneux et méthodique, ce qui implique de bien réfléchir au montage que l'on veut réaliser avant de le réaliser, puis de vérifier pas à pas que la réalité correspond bien au schéma et que les différents éléments du montage sont corrects (alignement des instruments d'optique, etc..)

Une fois les résultats obtenus, il faut les analyser avec un œil critique.



**figure 2. Même chose que pour la figure 1, mais on se rend compte cette fois que toutes les mesures sont décalées dans le même sens. Cette erreur se détecte en calculant la moyenne des valeurs mesurées et en constatant qu'elle est anormalement éloignée de la valeur « vraie » attendue.**

Il est important de repérer les causes d'erreur possible pendant l'expérience pour éventuellement y remédier. Une erreur systématique liée à un mauvais réglage du zéro d'un instrument se détecte dès qu'on trace la courbe et peut conduire à refaire la série de mesures. Un mauvais choix de calibre sur un oscilloscope peut conduire à des mesures imprécises. Souvent la réalisation de deux mesures dans des situations extrêmes (la plus grande et la plus petite) permet de tester les choix de réglages faits a priori.

## **2 Erreur et incertitude : définitions.**

### **a. Erreur**

L'exemple précédent nous permet de donner une définition de l'erreur :

L'erreur associée à une mesure est la différence entre la valeur mesurée et la vraie valeur. On la note habituellement par  $\delta$ , suivi du symbole représentant la grandeur mesurée :  $\delta x$  pour une longueur  $x$ ,  $\delta T$  pour une température  $T$ , etc...

$$\delta x = x_{\text{mesuré}} - x_{\text{vrai}}$$

Naturellement,  $x_{\text{vrai}}$  ne nous est à jamais accessible (sinon, la mesure serait inutile) et donc  $\delta x$  est toujours inconnu : il est toujours impossible de connaître l'erreur sur une mesure.

À noter : l'erreur a un signe : elle peut être positive ou négative.

Dans la suite de ce texte, on notera la valeur  $x_{\text{mesuré}}$  simplement par  $x$ , sauf quand on aura besoin de la comparer à  $x_{\text{vrai}}$ .

### **b. Incertitude**

Puisque l'erreur est à jamais inconnue, tout cela peut paraître totalement inutile. Heureusement, ce n'est pas le cas. Ce que l'on va chercher maintenant à faire est d'encadrer l'erreur. On ne peut pas connaître la valeur précise de  $\delta x$  mais on va se donner le moyen de dire : pour la majorité des mesures,  $\delta x$  est compris entre  $-\Delta x$  et  $+\Delta x$  :

$$-\Delta x \leq \delta x \leq \Delta x$$

L'incertitude  $\Delta x$ , définie ci-dessus est l'incertitude absolue sur la mesure de  $x$ . Cette incertitude a la même unité que la grandeur physique  $x$ , elle permet de définir un intervalle dans lequel il y a une forte probabilité de trouver la valeur « vraie » de la quantité que l'on mesure :  $[x_{\text{vrai}} - \Delta x, x_{\text{vrai}} + \Delta x]$ .

Il est important de comprendre que l'incertitude est associée à la notion de probabilité. Si après avoir déterminé  $\Delta x$  on refait une nouvelle mesure, on ne peut pas exclure qu'elle tombe en dehors de l'intervalle, mais la probabilité que cela se produise est faible. Si on fait 10 mesures, 6 à 7 tomberont dans l'intervalle.

### **c. Incertitude relative**

La qualité d'une mesure peut être aussi donnée par l'incertitude relative sur cette mesure :  $\Delta x/x$ . Cette incertitude est un nombre sans dimension qui caractérise la précision de la mesure.

*Une incertitude de 1 mm sur une mesure de 5 cm correspond à une précision relative de  $\Delta x/x = 1 \text{ mm} / 5 \text{ cm} = 2\%$ .*

*Cette même incertitude sur une mesure de 5 m correspondrait à une précision, excellente, de  $1 \text{ mm} / 5 \text{ m} = 0,02\%$ .*

### **d. Présentation des résultats numériques**

Lorsque l'on indiquera la valeur finale  $x$  obtenue dans une expérience, elle sera présentée avec son incertitude  $\Delta x$ , le tout avec le nombre de chiffres significatifs correspondants à l'incertitude :

*par exemple : pour  $x = 5 \text{ cm}$  et  $\Delta x = 1 \text{ mm}$  on écrira :*

$$x = 5,0 \pm 0,1 \text{ cm}$$

*Il faut absolument indiquer 5,0 et non pas 5.*

Pour des mesures comme celles effectuées dans le cadre des Travaux Pratiques, il n'est en général pas possible de déterminer l'incertitude avec plus d'un chiffre significatif. Après application numérique avec la calculatrice, on arrondira l'incertitude au chiffre le plus proche.

Reste à savoir comment estimer les incertitudes : plusieurs méthodes sont utilisées. Comme on l'a vu sur l'exemple du III, la répétition d'une même mesure permet de faire des statistiques et d'estimer l'incertitude. Cette façon de faire est très efficace mais n'est pas toujours utilisable en Travaux Pratiques à cause du temps qu'elle nécessite, elle sera développée plus en détail au chapitre V. Une autre méthode consiste à analyser les causes de l'incertitude et à estimer l'incertitude à partir de ces causes, c'est l'objet du chapitre qui suit.

## IV Le calcul des incertitudes

Souvent la mesure de la quantité recherchée n'est pas directe mais dépend de plusieurs paramètres mesurés indépendamment. L'incertitude sur la mesure finale dépend alors des incertitudes sur les grandeurs intermédiaires. Il faut alors faire un calcul d'incertitude pour estimer l'incertitude finale.

*La valeur de la constante de temps du circuit R-C évoqué plus haut dépend de la valeur de la résistance et de la valeur de la capacité. L'incertitude sur  $\tau$  est donc fonction des incertitudes sur R et sur C.*

### 1 Estimation numérique de l'incertitude

Partant des incertitudes connues sur les grandeurs intermédiaires, on peut déduire les différentes valeurs possibles pour le résultat final et donc l'incertitude sur ce résultat.

*Supposons que  $\Delta R$  et  $\Delta C$  soient les incertitudes sur R et C. Cela signifie que la valeur probable de R est comprise entre  $R_- = R - \Delta R$  et  $R_+ = R + \Delta R$ . Même chose pour C. On en déduit que la plus petite valeur possible pour  $\tau$  est  $\tau_- = R_- C_- = (R - \Delta R)(C - \Delta C)$ . De la même façon la plus grande valeur possible est  $\tau_+ = R_+ C_+$ . L'incertitude sur  $\tau$  peut alors être estimée raisonnablement comme la moitié de l'écart entre ces deux valeurs extrêmes, soit :  $\Delta \tau = \frac{\tau_+ - \tau_-}{2}$ .*

Ainsi une simple application numérique suffit pour calculer l'incertitude. Ce genre d'estimation numérique est toujours possible mais peut poser des problèmes pratiques dès que la fonction est un petit peu compliquée. Par exemple si elle est croissante en fonction d'un paramètre et décroissante en fonction d'un autre, la détermination des bornes nécessite plus d'attention.

Il existe une méthode mathématique qui permet de faire le calcul d'incertitude de manière systématique.

### 2 Calcul général

Le principe du calcul d'incertitude est basé sur l'hypothèse que les erreurs sont petites par rapport aux quantités elles-mêmes. On cherche à savoir de combien bouge la quantité recherchée quand les variables mesurées bougent d'une certaine quantité, faible par rapport à leurs valeurs. C'est typiquement le genre de problème qui peut être traité par un développement limité.

Supposons que le paramètre mesuré,  $f$ , soit une fonction de deux autres paramètres,  $x$  et  $y$  :  $f(x,y)$ . Si l'on fait varier  $x$  d'une petite quantité  $dx$  et  $y$  d'une petite quantité  $dy$ ,  $f(x,y)$  peut s'écrire :

$$f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Si on note  $df$  la variation de  $f$  s'écrit :

$$df = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

et on reconnaît dans cette expression la différentielle de la fonction  $f$ .

L'incertitude  $\Delta f$  sur  $f$  est la plus grande valeur que peut prendre  $df$  quand  $x$  varie de  $\Delta x$  et  $y$  de  $\Delta y$ . Soit

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y.$$

*L'incertitude sur la somme de deux angles  $\theta = \theta_1 + \theta_2$  sera  $\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$ . Si les incertitudes sur les mesures des deux angles sont identiques on aura  $\Delta\theta = 2\Delta\theta_1$ . Mais il faut bien noter que l'incertitude sur la différence  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  serait la même. On vérifiera facilement que la méthode donnée au 1 donnerait le même résultat.*

Quelle que soit la formule qui permet de passer des mesures intermédiaires à la mesure finale, le calcul différentiel permet de faire le calcul d'incertitude en utilisant l'expression ci-dessus.

*Considérons un autre exemple pour lequel l'efficacité de la méthode est plus évidente : celui de la dispersion de la lumière par un réseau qui permet la mesure des longueurs d'onde par la relation :*

*$\lambda = \frac{\sin \theta}{kN}$ . Dans un ordre  $k$  donné, la longueur d'onde dépend de deux variables,  $\theta$  et  $N$ , le nombre*

*de traits du réseau par mm. En différenciant cette relation on obtient*

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \lambda}{\partial N} dN = \frac{\cos \theta}{kN} d\theta - \frac{\sin \theta}{kN^2} dN.$$

*L'incertitude sur la mesure de  $\lambda$  s'écrit donc :  $\Delta\lambda = \left| \frac{\cos \theta}{kN} \right| \Delta\theta + \left| \frac{\sin \theta}{kN^2} \right| \Delta N$ .*

**Remarque sur les calculs faisant intervenir des angles :** l'unité mathématique d'angle est le radian, c'est donc en radian que doit s'exprimer  $\Delta\theta$ . Par contre, l'unité qui intervient dans le cosinus ou le sinus est sans importance ; on doit juste veiller à exprimer  $\theta$  en degrés si la calculatrice est réglée pour fonctionner en degrés. Un moyen simple de savoir l'unité utilisée par la calculatrice est de calculer le cosinus d'un angle particulier ( $90^\circ$ ).

### **3 Erreur sur un produit ou un quotient**

Un cas particulier fréquent mérite d'être noté, c'est le cas où la formule est un produit. On gagne du temps alors en utilisant la dérivée logarithmique pour calculer directement l'incertitude relative :  $x = yz$  est équivalent à  $\ln x = \ln y + \ln z$ .

En différenciant on en déduit  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$  et donc  $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$ .

*On peut calculer ainsi l'incertitude sur la constante de temps ci-dessus :*

*$\tau = RC$  implique  $\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta C}{C}$ . On vérifiera que le résultat obtenu est identique à celui obtenu*

*au paragraphe 1.*

Cette méthode se généralise aux produits plus compliqués et aux quotients, toujours en prenant les valeurs absolues, c'est-à-dire en ajoutant les incertitudes. Ecrivons, dans le cas général :  $f(x,y)=x^\alpha y^\beta$  ( $x > 0, y > 0$ ). Cette relation peut s'écrire aussi :  $\ln f = \alpha \ln x + \beta \ln y$ . En différenciant, on en déduit :

$$\frac{df}{f} = \alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y} \text{ et donc l'incertitude relative sur } f \text{ vaut :}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \alpha \frac{\Delta x}{x} + \beta \frac{\Delta y}{y}$$

## V Les séries de mesures et les statistiques

Voir le cours de Statistiques pour plus de détails.

Souvent l'expérience ne se limite pas à faire une mesure d'une quantité mais consiste soit à calculer plusieurs fois la même grandeur à partir de différentes mesures, soit à tracer une grandeur en fonction d'une autre.

### 1 Statistiques sur une grandeur

Une même expérience peut conduire à effectuer plusieurs estimations de la même grandeur  $x$  à partir de différentes mesures  $x_i$ . On peut en déduire alors la valeur moyenne de  $x$  :  $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1, N} x_i$  et l'écart

type  $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$  (que l'on appelle aussi dispersion). Ces formules sont programmées dans la plupart des calculatrices.

Lorsque l'on s'est affranchi de toutes les erreurs systématiques, les théories statistiques montrent que :

- $\sigma$  permet une bonne estimation de l'incertitude absolue sur une mesure individuelle de  $x$ . Pourvu que le nombre de points soit assez grand (quelques dizaines), la largeur de l'intervalle dans lequel sont regroupées 95% des mesures vaut  $4\sigma$ . On en déduit que  $\Delta x = 2\sigma$ .
- L'incertitude sur la moyenne  $\langle x \rangle$  vaut  $2\sigma/\sqrt{N}$ . Ce résultat montre que l'on peut diminuer l'incertitude autant que l'on veut en répétant l'expérience un grand nombre de fois.

*Sur l'exemple de mesures de longueur présenté sur la figure 1, on calcule une moyenne de 1,95 et un écart type de 0,14. L'incertitude sur une mesure de longueur donnée est donc 0,3. L'incertitude sur la moyenne est de 0,06. Si on effectue 80 mesures au lieu de 20, on trouve toujours une moyenne de 1,95 et un écart type de 0,137, mais l'incertitude sur la moyenne devient 0,03.*

### 2. Tracé de courbes

Un certain nombre d'expériences consistent à vérifier des lois de variation d'une grandeur en fonction d'un paramètre.

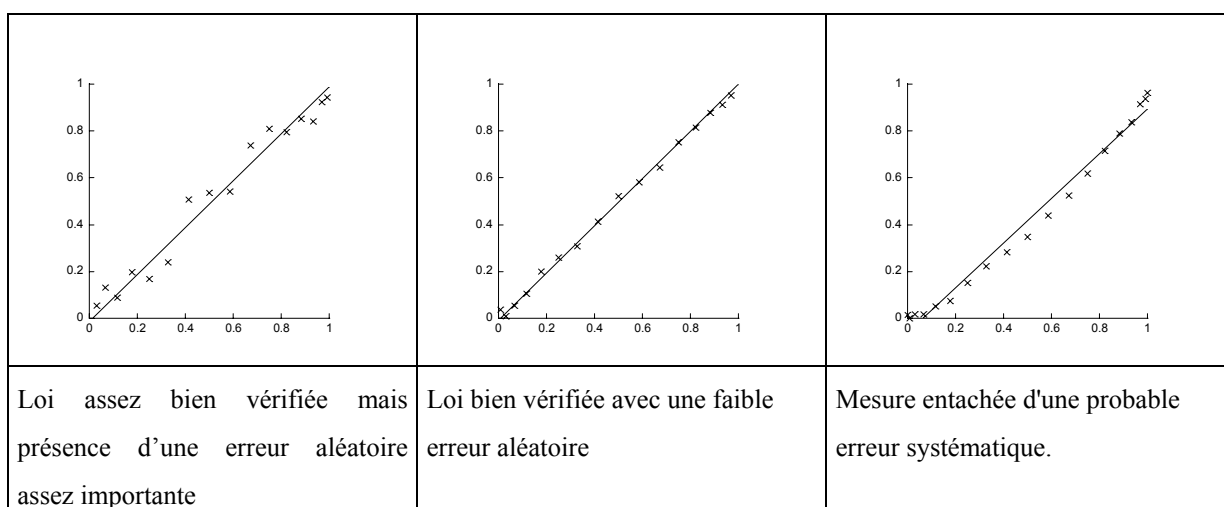
*La loi de Malus par exemple indique que l'intensité lumineuse transmise par une succession de deux polariseurs est proportionnelle au carré du cosinus de l'angle que font ces polariseurs :  $I/I_0 = (\cos \alpha)^2$ . L'intérêt physique de cette loi réside bien dans la variation en fonction de  $\alpha$  et non dans la valeur de la constante  $I_0$ .*

Dans ce cas il est intéressant de tracer une courbe pour tester si la loi est vérifiée. Le choix des paramètres que l'on trace est important pour la lisibilité du résultat et les paramètres directement mesurés (comme ici

l'angle et l'intensité lumineuse) ne sont pas forcément les plus faciles à interpréter. La courbe pour laquelle il est le plus simple de savoir si la loi est vérifiée ou non est la droite, on a donc toujours intérêt à choisir les paramètres tracés de manière à ce que la courbe obtenue doive être une droite.

*Pour la loi de Malus, l'identification d'un cosinus au carré est difficile par contre le tracé de l'intensité en fonction de  $(\cos\alpha)^2$  doit donner une droite et sera donc beaucoup plus facile à interpréter.*

Le tracé des différents points de mesure sur un graphique donne un nuage de points. Il faut analyser ensuite si on peut définir une droite passant par ces points. Différents cas peuvent se présenter qui sont sommairement résumés sur les schémas ci-dessous.



**Figure 3. Différents types de résultats pouvant être obtenus lors de la réalisation de la vérification de la loi de Malus. L'erreur aléatoire se caractérise par une répartition aléatoire des points de part et d'autre de la droite d'ajustement. L'erreur systématique se traduit par une oscillation autour de cette droite (pour certains angles, les points sont tous au-dessous de la droite).**