5. Les conducteurs électriques

5.1. Introduction

Un conducteur électrique est un milieu dans lequel des charges électriques sont libres de se déplacer. Ces charges sont des électrons ou des ions. Les métaux, les électrolytes et les plasmas (gaz ionisés) sont des milieux conducteurs.

5.1.1. Conducteur dans un champ électrique statique

Plaçons un morceau de métal dans un champ électrique statique. A l'intérieur du métal, les électrons de conduction, qui sont libres de se déplacer dans tout le volume, sont soumis à une force qui les met en mouvement. Les électrons sont stopppés à leur arrivée sur les parois du métal et s'y accumulent. Leur accumulation crée un champ électrique qui s'additionne au champ extérieur. Aprés cette phase transitoire, on atteint un état d'équilibre.

A l'équilibre, les électrons qui sont à l'intérieur du conducteur sont immobiles. Cela signifie que le champ électrique auquel ils sont soumis est nul. *Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un milieu conducteur à l'équilibre.* On déduit immédiatement à partir du théorème de Gauss que la densité totale de charge est nulle : *la densité volumique de charge est nulle à l'intérieur d'un milieu conducteur.* Dans un métal par exemple, la densité de charge négative due aux électrons compense donc exactement la densité de charges positives due aux noyaux.

Puisqu'à l'extérieur du conducteur, le champ électrique n'est pas nul, il y a une discontinuité du champ électrique à la surface du conducteur. Une partie des charges s'est accumulée en surface. Le champ créé par cette densité surfacique de charge à l'intérieur du conducteur y compense exactement le champ électrique extérieur.

Lorsque l'on change le champ électrique extérieur, les charges se déplacent de sorte que le champ électrique reste nul à l'intérieur. Si le changement est lent, les courants électriques sont des courants surfaciques.

5.1.2. Conducteurs dans un champ électrique variable

Lorsque le champ électrique change, la mise à l'équilibre ne peut pas être instantanée car les charges électriques doivent se mettre en mouvement. Deux phénomènes interviennent alors : l'inertie des charges est à l'origine d'un retard de la réponse, les collisions des porteurs sont à l'origine de dissipation. Avant d'étudier les conducteurs réels, on considèrera une situation modèle où ces deux phénomènes sont absents.

Dans cette situation idéalisée, on considérera qu'il n'y a pas de dissipation et que la réponse est instantanée. On parlera alors de conducteur parfait ou de conducteur idéal.

5.2. Du conducteur parfait aux conducteurs réels

Le conducteur parfait est une idéalisation des conducteurs réels. L'étude des conducteurs réels permettra de déterminer les domaines de paramètres dans lesquels on peut les considérer comme idéaux. Les milieux supraconducteurs où la dissipation est parfaitement nulle sont aussi un trés bon exemple de ce que peut être un conducteur idéal (on notera toutefois que seule la dissipation est absente de ces milieux : les électrons y conservent leur inertie).

5.2.1. Le conducteur parfait

Un conducteur parfait se comporte en régime dynamique de la même manière qu'un conducteur en régime statique. Pour un conducteur parfait, le champ électrique intérieur $\vec{E}_{\text{int}}$est nul :

$$\vec{E}_{\text{int}}\left(\vec{r},t\right)=0. \tag{5.1}$$

On déduit de l'équation de Maxwell-Gauss que la densité volumique de charge est nulle :

$$\rho_{\text{int}}\left(\vec{r},t\right)=\varepsilon_0\ \text{div}\ \vec{E}_{\text{int}}=0. \tag{5.2}$$

Par conséquent, seule la densité surfacique de charge peut être différente de zéro.

L'équation de Maxwell-Faraday permet de conclure qu'à l'intérieur d'un conducteur parfait le champ magnétique ne peut dépendre du temps :

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E}=0. \tag{5.3}$$

Dans un conducteur parfait le champ magnétique est nécessairement statique. On notera que dans les supraconducteurs, le champ magnétique est nul (effet Meissner : lorsqu'un conducteur passe de l'atét normal à l'état supraconducteur, les lignes de champ magnétiques sont expulsées de sorte que le champ magnétique devient nul à l'interieur du supraconducteur).

On déduit alors de l'équation de Maxwell-Ampère que les courants électriques sont nécessairement stationnaires, c'est à dire indépendants du temps :

$$\vec{j}=\frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}. \tag{5.4}$$

Les seuls courants qui peuvent dépendre du temps sont les courants surfaciques.

5.2.2. Réflexion sur un conducteur parfait

Que se passe-t-il lorsqu'une onde électromagnétique arrive sur un conducteur parfait ? Cette onde met en mouvement les charges en surface du conducteur. A l'intérieur du conducteur le champ électrique tout comme le champ magnétique restent nuls. Le champ électromagnétique émis par les charges en mouvement à la surface du conducteur compense exactement le champ incident à l'intérieur du conducteur : la surface émet une onde de même amplitude que le champ incident et en opposition de phase. Si la surface est un plan, on déduit par symétrie que le champ émis par ces charges en mouvement vers l'extérieur du conducteur est le symétrique du champ qu'il émet vers l'intérieur. On retrouve bien ce que l'on attend d'un miroir, avec en suplément le fait que le champ réfléchi subit un déphasage de π par rapport au champ incident.

5.3. Modèles de conducteurs réels

L'étude des milieux n'est pas une théorie "à principes" comme peut l'être l'electromagnétisme dans le vide. Pour l'électromagnétisme dans le vide, il suffit de prendre comme postulat les quatre équations de Maxwell, l'expression de la force de Lorentz et la relation fondamentale de la dynamique. Tout le reste se construit à partir de ces équations et s'en déduit par des raisonnements logiques.

Pour les milieux, on ne dispose pas de système d'équations que l'on pourrait considérer comme des postulats. Les théories les plus précises dont on dispose sont extrèmement complexes et font appel à la théorie quantique. Notre but ici est plutot d'étudier des grandes classes de comportement génériques, en particulier dans des cas limites. Pour cela les matériaux seront décrits d'une part au niveau macroscopique par des "équations d'état" (aussi nommées relations constitutives) c'est à dire des coefficients tels que la conductivité electrique, la permittivité, ... On dispose aussi de modèles microscopiques que l'on qualifie de phénoménologiques car certains aspects ne sont pas déduits des premiers principes mais ajoutés "à la main" de manière à ce que le comportement obtenu mime au mieux le comportement observé dans les matériaux réels. Outre leur aspect prédictif, ces modèles ont le grand intéret de nourrir l'intuition physique. Il faut toutefois rester vigilant et ne pas les prendre forcement au pied de la lettre. On notera aussi que si certaines justifications parfois données pour ces modèles semblent simplistes, il existe trés souvent des raisons très profondes à leur efficacité.

5.3.1. L'électron amorti

Dans le modèle proposé, on considère que les électrons sont responsables de la conduction du milieu. Un électron libre de masse m_e et de charge électrique $q = -e$ obéit à l'équation d'évolution suivante :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_L - \Gamma \vec{v}. \tag{5.5}$$

Le permier terme, $\vec{F}_L$ est la force de Lorentz :

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right). \tag{5.6}$$

Dans la suite, lorsque le champ électrique et le champ magnétique viennent tout deux d'une même onde électromagnétique, on négligera en général le terme dù au champ magnétique, inférieur à celui du champ électrique d'un facteur $\frac{v}{c}$ qui est trés petit tant que les vitesses ne sont pas relativistes. Attention, lorsque l'on est en présence d'une onde électromagnétique et d'un champ magnétique statique, seul le champ magnétique provenant de l'onde peut être négligé, car lui seul est proportionel au champ électrique. Le champ statique peut conduire à une force comparable à celle du champ électrique de l'onde même si les vitesses ne sont pas relativistes.

Le second terme $-\Gamma\vec{v}$ est une force de friction visqueuse ajoutée pour des raisons phénoménologiques. Il rend compte des mécanismes dissipatifs présents dans le milieu. Le coefficient de friction ne peut en général pas être calculé à partir des premiers principes (équations de Maxwell, mécanique quantique, ...), on obtient en géneral sa valeur en le reliant aux paramètres macroscopiques du milieu. Dans un plasma, la friction est due aux collisions des électrons avec les ions et avec les molécules restées neutres. Dans un métal, il s'agit de l'interaction entre les électrons et les vibrations mécaniques du réseau cristallin.

Dans un champ électrique statique $\vec{E}_0$, l'équation d'évolution de l'électron a pour solution :

$$\vec{v}\,(t) = \vec{v}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\frac{q}{\Gamma}\vec{E}_0. \tag{5.7}$$

où $\vec{v}_0$ est la vitesse de l'électron à l'instant initial $t = 0$. Le temps caractéristique d'amortissement est τ

$$\tau = \frac{m_e}{\Gamma} \tag{5.8}$$

la vitesse initiale est amortie tandis que la vitesse de l'électron tend vers une vitesse limite $\vec{v}_l$:

$$\vec{v}_l = \frac{q}{\Gamma}\vec{E}_0. \tag{5.9}$$

5.3.2. Conductivité électrique

Lorsque la densité volumique d'électrons est N_e, la densité stationnaire de courant $\vec{j}$ est

$$\vec{j} = qN_e\vec{v}_l = \frac{N_e e^2}{\Gamma}\vec{E}_0. \tag{5.10}$$

Cette densité de courant est proportionelle au champ électrique : on retrouve ainsi un comportement ohmique

$$\vec{j} = \sigma_0\vec{E}_0 \tag{5.11}$$

correspondant à une conductivité σ_0 :

$$\sigma_0 = \frac{N_e e^2}{\Gamma}. \tag{5.12}$$

Pour un milieu donné, on peut donc reexprimer le coefficient de friction phénoménologique Γ à l'aide de constantes fondamentales ou de grandeurs macroscopiques mesurées :

$$\Gamma = \frac{N_e e^2}{\sigma_0} \tag{5.13}$$

on en déduit aussi le temps caractérisque d'amortissment :

$$\tau^{-1} = \frac{N_e e^2}{\sigma_0 m_e} \tag{5.14}$$

Si le champ électrique n'est plus statique mais dépend du temps, tant que le temps caractérique d'évolution du champ électrique est grand devant ce temps d'amortissment, les électrons sont en permanence à leur vitesse limite et le conducteur est ohmique.

De manière plus générale, on peut analyser la réponse du milieu à un champ électrique sinusoidal. En notation complexe, l'équation du mouvement devient

$$\left(-i\omega m_e + \Gamma\right) \underline{\vec{v}} e^{-i\omega t} = q\vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t} \tag{5.15}$$

soit une vitesse

$$\underline{\vec{v}} = \frac{q}{\Gamma - i\omega m_e} \vec{\mathcal{E}}_0 \tag{5.16}$$

La densité de courant est alors

$$\underline{\vec{j}} = \frac{N_e e^2}{\Gamma - i\omega m_e} \vec{\mathcal{E}}_0 = \frac{N_e e^2}{\Gamma} \frac{1}{1 - i\omega \frac{m_e}{\Gamma}} \vec{\mathcal{E}}_0 = \sigma_0 \frac{1}{1 - i\omega\tau} \vec{\mathcal{E}}_0 \tag{5.17}$$

On en déduit qu'en régime sinusoidal la conductivité devient complexe et dépend de la fréquence

$$\sigma\left[\omega\right] = \sigma_0 \frac{1}{1 - i\omega\tau}. \tag{5.18}$$

Ce modèle proposé par le physicien Drude rend très bien compte de la dépendance en fréquence de la conductivité pour de trés nombreux matériaux. On notera toutefois que si l'on souhaite une description plus précise, il faut aller chercher les valeurs de la conductivité expérimentales dans des tables.

5.4. Propagation dans les conducteurs

5.4.1. Les conducteurs ohmiques

Ces conducteurs sont caractérisés en volume par l'équation d'état

$$\rho = 0 \tag{5.19}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{5.20}$$

avec une conductivité σ réelle. Les équations de Maxwell s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}
\text{div } \vec{E} &= 0 && (5.21)\\
\text{div } \vec{B} &= 0 && (5.22)\\
\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && (5.23)\\
\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} &= \mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} && (5.24)
\end{aligned}$$

De même qu'en l'absence de charges, on obtient une équation de propagation pour le champ électrique seul en calculant le double rotationnel du champ électrique

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E}\right) &= \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} && (5.25)\\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) && (5.26)
\end{aligned}$$

soit

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{5.27}$$

Un terme supplémentaire proportionel à la dérivée temporelle du champ électrique s'ajoute à l'équation de d'Alembert. Cette équation reste toutefois linéaire. Toute solution de cette équation peut donc s'écrire comme une superposition de solutions monochromatiques (grâce à la transformée de Fourier). En notation complexe, l'amplitude complexe $\vec{\mathcal{E}}\left(\vec{r}, t\right)$ d'une solution monochromatique de pulsation ω s'écrit

$$\vec{\mathcal{E}}\left(\vec{r}, t\right) = \vec{\mathcal{E}}\left(\vec{r}\right) e^{-i\omega t}. \tag{5.28}$$

$\vec{\mathcal{E}}\left(\vec{r}\right)$ vérifie l'équation suivante :

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \vec{\mathcal{E}} - i\omega \mu_0 \sigma \vec{\mathcal{E}}. \tag{5.29}$$

Si on se restreint à une onde plane se propageant selon l'axe Oz et polarisée selon Ox $\left(\vec{\mathcal{E}}\left(\vec{r}\right) = \mathcal{E}\left(z\right) \vec{u}_x\right)$cette équation devient

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{E}\left(z\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \mathcal{E}\left(z\right) - i\omega \mu_0 \sigma \mathcal{E}\left(z\right). \tag{5.30}$$

Les solutions de cette équation s'écrivent de manière semblable à celle des ondes progressives

$$\mathcal{E}\left(z\right) = \mathcal{E}_1 e^{ikz} + \mathcal{E}_2 e^{-ikz} \tag{5.31}$$

où la grandeur k vérifie l'équation

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 + i\omega \mu_0 \sigma. \tag{5.32}$$

Ce "nombre d'onde" k n'est pas réel mais a une partie imaginaire non nulle. On parle donc parfois de pseudo vecteur d'onde ou pseudo nombre d'onde.

Plutot que de décrire le cas général, nous allons discuter les deux situations limites correspondant aux situations ou l'un des deux termes du second membre est négligeable devant l'autre. Ces deux situations sont les suivantes :

– $\sigma \ll \varepsilon_0\omega$: Il s'agit du cas des mauvais conducteurs électriques aussi appelés milieux à pertes.
– $\sigma \gg \varepsilon_0\omega$: il s'agit des très bons conducteurs.

Avant de passer à la discussion déterminons le champ magnétique. On se sert pour cela de l'équation de Maxwell Faraday qui n'est pas modifiée par la présence du conducteur :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5.33}$$

Soit, si l'on ne considère que la solution $\mathcal{E}_1 e^{ikz}$

$$ik\ \vec{u}_z \times \vec{\mathcal{E}}_1 = i\omega\ \vec{\mathcal{B}} \tag{5.34}$$

Soit

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{k}{\omega}\ \vec{u}_z \times \vec{\mathcal{E}}_1 \tag{5.35}$$

Attention k est complexe. Le champ magnétique est donc déphasé par rapport au champ électrique.

5.4.2. Propagation dans un mauvais conducteur

Pour les mauvais conducteurs ($\sigma \ll \varepsilon_0\omega$), le terme supplémentaire dans l'équation de propagation peut être vu comme un terme correctif à la propagation dans le vide. Le vecteur d'onde est très peu différent du vecteur d'onde $k_0 = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\omega = \frac{\omega}{c}$ dans le vide :

$$k = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0\omega^2 + i\omega\mu_0\sigma} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{1 + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}} \tag{5.36}$$

$$\simeq \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\omega\left(1 + i\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\omega}\right) = k_0 + i\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \tag{5.37}$$

Il apparait une longueur caractéristique l_p :

$$l_p = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}. \tag{5.38}$$

On peut donc écrire

$$k = k_0 + i\frac{1}{l_p}. \tag{5.39}$$

Les solutions à l'équation de propagation sont donc dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(z,t) &= \mathcal{E}_1 \exp\left[i\left(\left(k_0 + i\frac{1}{l_p}\right)z - \omega t\right)\right] && (5.40)\\
&\quad + \mathcal{E}_2 \exp\left[i\left(-\left(k_0 + i\frac{1}{l_p}\right)z - \omega t\right)\right] && (5.41)\\
&= e^{-\frac{z}{l_p}} e^{i(k_0 z - \omega t)} + \mathcal{E}_2 e^{\frac{z}{l_p}} e^{i(-k_0 z - \omega t)} && (5.42)
\end{aligned}$$

Soit en revenant à l'amplitude réelle

$$E(z,t) = E_1 e^{-\frac{z}{l_p}} \cos(k_0 z - \omega t + \varphi_1) + E_2 e^{\frac{z}{l_p}} \cos(-k_0 z - \omega t + \varphi_2) \tag{5.43}$$

Le premier terme correspond à une onde qui se propage vers les z croissants tout en s'atténuant tandisque la seconde correspond à une onde qui se propage vers les z décroissants qui s'atténue elle aussi. L'amplitude de l'onde décroit de $1/e$ au bout de la distance l_p. On remarquera que cette distance d'absorption ne dépend pas de la fréquence. L'énergie perdue par l'onde électromagnétique est transformée en chaleur par effet Joule.

5.4.3. Les bons conducteurs : l'effet de peau

pour les bons conducteurs ($\varepsilon_0\omega \ll \sigma$) c'est le second terme qui est dominant :

$$k^2 = i\omega\mu_0\sigma \tag{5.44}$$

dont la solution de partie imaginaire positive est

$$k = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu_0\sigma} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} \tag{5.45}$$

k s'exprime en fonction d'une longueur caractéristique δ

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \tag{5.46}$$

Cette longueur caractéristique est très petite devant la longueur d'onde dans le vide :

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} = k_0\delta = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\omega \cdot \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}} \ll 1 \tag{5.47}$$

puisque nous avons fait l'hypothèse de bon conducteur $\varepsilon_0\omega \ll \sigma$

La solution de l'équation s'écrit alors :

$$\mathcal{E}(z,t) = \mathcal{E}_1 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)} + \mathcal{E}_2 e^{\frac{z}{\delta}} e^{i\left(-\frac{z}{\delta} - \omega t\right)} \tag{5.48}$$

Soit en notation réelle

$$E(z,t) = E_1 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \varphi_1\right) + E_2 e^{\frac{z}{\delta}} \cos\left(-\frac{z}{\delta} - \omega t + \varphi_2\right) \tag{5.49}$$

La décroissance exponentielle fait penser à ce qui se passe dans le cas du mauvais conducteur mais il n'en est rien comme nous allons le voir en étudiant la réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur.

5.4.4. La reflexion d'une onde par un conducteur réel

On considère que le demi espace $z < 0$ est vide tandisqu'un conducteur de conductivité σ occupe le demi espace $z > 0$. Pour déterminer ce qui se passe lorsqu'une onde arrive sur le conducteur, il faut établir les relations de passage entre les deux milieux.

Avant de traiter les conditions de passage entre milieux de manière générale, on considère ici le cas où l'onde arrive perpendiculairement à la surface du conducteur. Il n'y a alors ni charge surfacique, ni courant de surface, de sorte que le champ électrique et le champ magnétique sont tous deux continus lors de la traversée de l'interface vide conducteur (ne ne justifions pas pour l'instant ces deux affirmations cela sera fait lorsque nous nous intéresseront plus précisément aux relations de passage).

Dans le demi espace $z < 0$ le champ est la superposition d'une onde progressive et d'une onde régressive

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \mathcal{E}_{\mathrm{in}} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \vec{u}_x + \mathcal{E}_{\mathrm{ref}} e^{i(-k_0 z - \omega_0 t)} \vec{u}_x \tag{5.50}$$

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) = \frac{k_0}{\omega_0} \left(\mathcal{E}_{\mathrm{in}} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \vec{u}_y - \mathcal{E}_{\mathrm{ref}} e^{i(-k_0 z - \omega_0 t)} \vec{u}_y \right) \tag{5.51}$$

En ce qui concerne le conducteur, c'est à dire pour $z > 0$, comme nous considérons que celui ci s'étend jusqu'à l'infini, seule la solution qui décroit exponentiellement vers la droite est acceptable

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \mathcal{E}_{\mathrm{tr}} e^{i(kz - \omega_0 t)} \vec{u}_x \tag{5.52}$$

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) = \frac{k}{\omega_0} \mathcal{E}_{\mathrm{in}} e^{i(kz - \omega_0 t)} \vec{u}_y \tag{5.53}$$

La continuité du champ électrique et du champ magnétique en $z = 0$ permet de déduire :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{in}} + \mathcal{E}_{\mathrm{ref}} = \mathcal{E}_{\mathrm{tr}} \tag{5.54}$$

$$\frac{k_0}{\omega_0} \left(\mathcal{E}_{\mathrm{in}} - \mathcal{E}_{\mathrm{ref}} \right) = \frac{k}{\omega_0} \mathcal{E}_{\mathrm{tr}} \tag{5.55}$$

Soit

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ref}} = \frac{k_0 - k}{k + k_0} \mathcal{E}_{\mathrm{in}} \tag{5.56}$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{tr}} = \frac{2k_0}{k + k_0} \mathcal{E}_{\mathrm{in}} \tag{5.57}$$

Reprenons le cas du mauvais conducteur

$$k = \left(k_0 + i \frac{1}{l_p} \right). \tag{5.58}$$

Ce qui donne

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ref}} \simeq -i \frac{1}{2k_0 l_p} \mathcal{E}_{\mathrm{in}} \tag{5.59}$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{tr}} \simeq \mathcal{E}_{\mathrm{in}} \tag{5.60}$$

Il n'y a quasiment pas de réflexion. Le champ se propage dans le conducteur et il est progressivement absorbé.

Dans le cas du bon conducteur

$$k = \frac{1+i}{\delta} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathrm{ref}} &= \frac{k_0\delta - (1+i)}{(1+i)+k_0\delta}\mathcal{E}_{\mathrm{in}} = -\frac{1-\frac{\delta k_0}{(1+i)}}{1+\frac{\delta k_0}{(1+i)}}\mathcal{E}_{\mathrm{in}} && (5.62)\\
&\simeq -\left(1-\frac{\delta k_0}{(1+i)}\right)\left(1-\frac{\delta k_0}{(1+i)}+...\right)\mathcal{E}_{\mathrm{in}} \simeq -\left(1-(1-i)\,\delta k_0\right)\mathcal{E}_{\mathrm{in}} && (5.63)\\
\mathcal{E}_{\mathrm{tr}} &= \frac{2k_0}{\frac{1+i}{\delta}+k_0}\mathcal{E}_{\mathrm{in}} = (1-i)\,k_0\delta\mathcal{E}_{\mathrm{in}} && (5.64)
\end{aligned}$$

Or

$$\delta k_0 = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}} \tag{5.65}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathrm{ref}} &= \simeq \left(1-(1-i)\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}}\right)\mathcal{E}_{\mathrm{in}} && (5.66)\\
\mathcal{E}_{\mathrm{tr}} &= (1-i)\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}}\mathcal{E}_{\mathrm{in}} && (5.67)
\end{aligned}$$

Remarques sur l'effet de peau

L'épaisseur de peau est inversement proportionelle à la fréquence : plus les fréquence sont élevées et moins les ondes pénètrent dans les conducteurs. Dans les fils, à partir d'une certaine fréquence, la conduction se fait en surface.

5.5. Les plasmas

Un plasma est un gaz partiellement ou totalement ionisé. C'est donc un milieu globalement neutre dans lequel on trouve des électrons, des ions et éventuellement des atomes ou des molécules neutres. Comme les ions sont plus de mille fois plus lourds que les électrons, l'amplitue de leurs mouvement et donc le cournat électrique qui leur est associé est négligeable devant le courant électronique.

Pour les plasma, l'inertie des électrons est un phénomène important. On s'interesse donc maintenant au cas plus général ou l'inertie compte.soit

$$\vec{j} = \frac{N_e e^2}{\Gamma - i m_e\omega}\vec{E} \tag{5.68}$$

On peut distinguer deux régimes : les basses fréquences, où la dissipation est dominante et les hautes fréquences où les effets d'inertie deviennent dominants. Dans le domaine basse fréquence, la prise en compte de l'inertie vient en correction de la dissipation. Cela revient juste à donner une partie imaginaire à la conductivité.

En haute fréquence, on rencontre par compte des phénomènes nouveaux. Nous commencerons donc à étudier la dynamique d'un plasma libre.

5.5.1. Dynamique d'un plasma libre

L'équation d'évolution de la vitesse ou, ce qui est équivalent celle de la densité volumique de courant est :

$$\Gamma\vec{j} + m_e\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = N_e e^2\vec{E}. \tag{5.69}$$

Combinons cette équation avec la relation de conservation de la charge électrique (Nous rappelons que la conservation de la charge est incluse dans les équations de Maxwell).

Cette équation s'écrit :

$$\mathrm{div}\ \vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \tag{5.70}$$

Prenons donc la divergence de l'équation d'évolution de la densité de courant $\vec{j}$

$$\Gamma\mathrm{div}\ \vec{j} + m_e\frac{\partial\mathrm{div}\ \vec{j}}{\partial t} = N_e e^2\mathrm{div}\ \vec{E} \tag{5.71}$$

$$-\Gamma\frac{\partial\rho}{\partial t} - m_e\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = N_e e^2\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{5.72}$$

soit

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{N_e e^2}{m_e\varepsilon_0}\rho = 0 \tag{5.73}$$

On trouve une équation d'évolution locale pour la densité electronique

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_0}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \omega_p^2\rho = 0 \tag{5.74}$$

C'est l'équation d'évolution d'un oscillateur harmonique. Le temps $\tau_0 = \frac{\Gamma}{m_e}$ est le temps caractéristique d'amortissement de la vitesse.et ω_p une pulsation appelée pulsation plasma :

$$\omega_p^2 = \frac{N_e e^2}{m_e\varepsilon_0}. \tag{5.75}$$

En l'absence de dissipation, un plasma est le siège d'oscillations à cette pulsation. On remarquera que la densité intervient dans la pulsation plasma : pour les faibles densités, la pulsation plasma est inférieure au temps caractéristique d'amortissement et il n'y a pas d'oscillations.

5.5.2. Propagation d'ondes dans un plasma

Comme dans un plasma la densité locale de charges peut être différente de zéro, la divergence du champ électrique n'est pas nécessairement nulle. On distingue deux types d'ondes : les ondes transverses, pour lesquelles la divergence du champ électrique est nul, ce sont celles que nous considérerons dans la suite. Il y a aussi des ondes longitudinales, qui correspondent aux oscillations plasma dans les fréquence supérieures à la fréquence plasma et aux ondes pseudo-sonores dans le domaine des basses fréquences.

Nous nous limitons maintenant aux ondes transverses, c'est à dire les ondes pour lesquelles

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = 0 \tag{5.76}$$

sans oublier que la divergence du champ magnétique est elle toujours nulle (Maxwell-flux)

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0 \tag{5.77}$$

Nous commencerons en nous limitant aux effets inertiels et nous introduirons la dissipation par la suite. Dans cette situation :

$$m_e \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = N_e e^2 \vec{E}. \tag{5.78}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{-i\omega} \frac{N_e e^2}{m_e} \vec{E} = i \frac{\omega_p^2}{\omega} \varepsilon_0 \vec{E} \tag{5.79}$$

Si l'on considère des ondes dont l'amplitude complexe est :

$$\vec{\mathcal{E}}\left(\vec{r}, t\right) = \mathcal{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)} \vec{u} \tag{5.80}$$

Maxwell-Faraday et Maxwell Ampère deviennent :

$$i\ \vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = -\left(-i\omega \vec{\mathcal{B}}\right) \tag{5.81}$$

$$i\ \vec{k} \times \vec{\mathcal{B}} = \mu_0\ \underline{\vec{j}} + \mu_0\varepsilon_0 \left(-i\omega\vec{\mathcal{E}}\right) = \left(i\ \mu_0\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} - i\omega\mu_0\varepsilon_0\right) \vec{\mathcal{E}} \tag{5.82}$$

On en déduit l'équation de dispersion suivante

$$k^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \omega_p^2\right) \tag{5.83}$$

La pulsation plasma ω_p sépare deux zones de fréquence où le plasma a des comportements très différents.

Domaine des basses fréquences : $\omega < \omega_p$

Dans ce domaine k^2 est négatif. k est donc imaginaire pur :

$$k = \pm i \frac{1}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} \tag{5.84}$$

Il n'y a aucune propagation dans le plasma. Ce milieu réflechit parfaitement les ondes electromagnétiques. On citera comme exemple l'ionosphère (partie de l'atmosphère située à quelques centaines de kilomètres d'altitude qui est partiellement ionisée). Celle ci réflechit les ondes dont la fréquence est inférieure à quelques mégahertz.

densité en electrons libres de l'ionosphère : 10^{10} à 10^{12} electrons/m^3 ce qui correspond à des pulsations plasma de 6×10^6 à 6×10^7 rad s-1

Domaine des hautes fréquences : $\omega > \omega_p$

Dans ce domaine k^2 est positif, le nombre d'onde k est donc réel 'si l'on néglige la dissipation). L'onde se propage dans le plasma sans être atténuée avec un nombre d'onde :

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}. \tag{5.85}$$

On peut chercher à déterminer la vitesse de propagation v_φ

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}. \tag{5.86}$$

Cette vitesse est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide. Comment cela est il possible sans entrer en conflit avec la relativité ? Pour le savoir, il faut déterminer à quelle vitesse peut se propager l'énergie ou un signal. En ce qui concerne l'énergie, comme il y a de la matière la situation est plus délicate que dans le vide. Le plus simple est de regarder la propagation d'un signal.

Nous allons détailler deux cas : le premier concerne la superposition de deux ondes monochromatiques planes de pulsation différentes et le second un paquet d'ondes.

Propagation d'un battement entre deux ondes On considère la superposition de deux ondes se propageant selon $0z$ et polarisées selon Ox. La première a une pulsation ω_1 et un nombre d'onde k_1 tandisque la seconde a une pulsation ω_2 et un nombre d'onde k_2 . Ces deux ondes ont une même amplitude E_0

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= E_0\cos(k_1x - \omega_1 t)\ \vec{u}_x + E_0\cos(k_2x - \omega_2 t)\ \vec{u}_x && (5.87)\\ &= E_0\cos k_1(x - v_1 t)\ \vec{u}_x + E_0\cos k_2(x - v_2 t)\ \vec{u}_x && (5.88)\end{aligned}$$

les phase de chacune de ces deux ondes se propagent aux vitesses v_1 et v_2

$$v_1 = \frac{\omega_1}{k_1}, \qquad v_2 = \frac{\omega_2}{k_2}. \tag{5.89}$$

Si les deux ondes ont des pulsations proches : ($\omega_2 - \omega_1 = \delta\omega \ll \omega_1$) les deux nombres d'onde seront proches ($k_2 - k_1 = \delta k \ll k_1$). Les deux vitesses seront proches

On peut réexprimer le champ électrique de cette onde pour mettre en évidence les battements :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = 2E_0\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\ \vec{u}_x \tag{5.90}$$

Les oscillations rapides ont une pulsation qui est la moyenne des deux pulsations et un nombre d'onde qui est la moyenne des deux nombres d'onde. Ces oscillations rapides se propagent à une célérité v_r peux différente des célérités v_1 et v_2

$$v_r = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \simeq v_1 \simeq v_2. \tag{5.91}$$

L'enveloppe a une pulsation égale à la moitié de la différence des deux pulsations et un nombre d'onde égal à la moitié de différence des nombres d'ondes. Cette enveloppe se propage donc avec la célérité v_g

$$v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{\delta\omega}{\delta k} \tag{5.92}$$

Propagation d'un paquet d'onde Gràce à la transformée de Fourier on peut exprimer toute onde comme superposition d'ondes monochromatiques de pulsation ω et de vecteur d'onde k, ces deux quantités étant reliées par la relation de dispersion propre au milieu considéré. Cette relation permet d'exprimer le vecteur d'onde en fonction de la pulsation ou de manière équivalente la pulsation en fonction du nombre d'onde.

$$\vec{E}(z,t) = \int \frac{dk}{2\pi} \mathcal{E}(k) \exp\left[i\left(kz - \omega t\right)\right] \ \vec{u}_x \tag{5.93}$$

Supposons que les pulsations qui interviennent dans cette onde sont toutes proches de la pulsation ω_0

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r},t) &= \exp\left[i\left(k_0 z - \omega_0 t\right)\right] \int \frac{dk}{2\pi} \mathcal{E}(k_0) \exp\left[i\left(\left(k-k_0\right)z - \left(\omega(k) - \omega(k_0)\right)t\right)\right] \ \vec{u}_x & (5.94)\\
&= \exp\left[i\left(k_0 z - \omega_0 t\right)\right] \int \frac{dk}{2\pi} \mathcal{E}(k_0) \exp\left[i\left(k-k_0\right)\left(z - \left(\frac{\omega(k) - \omega(k_0)}{(k-k_0)}\right)t\right)\right] \vec{u}_x & (5.95)\\
&= \exp\left[i\left(k_0 z - \omega_0 t\right)\right] F\left(z - v_g t\right) \ \vec{u}_x & (5.96)
\end{aligned}$$

C'est une onde quasi monochromatique de pulsation ω_0 modulée par une enveloppe F

$$F(z) = \int \frac{dk}{2\pi} \mathcal{E}(k_0) \exp\left[i\left(k-k_0\right)z\right] \tag{5.97}$$

cette enveloppe se propage à la célérité

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(kv_\varphi\right) = v_\varphi + k\frac{dv_\varphi}{dk} \tag{5.98}$$

Si l'on développe la pulsation à l'ordre suivant, le terme supplémentaire conduit à un étallement du paquet d'onde.

Dans notre cas

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}. \tag{5.99}$$

$$dk = \frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}\omega d\omega \tag{5.100}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}1}. \tag{5.101}$$

La vitesse de groupe, c'est à dire la vitesse de propagation de l'énergie est plus faible que la vitesse de la lumière dans le vide. La causalité est sauvée !