1. Les équations de Maxwell dans le vide

Ce chapitre vise à donner une vision générale des équations de Maxwell afin d'arriver le plus rapidement possible au coeur du cours : la propagation des ondes électromagnétiques et l'optique.

1.1. Enoncé des équations

Le socle de l'électromagnétisme repose sur cinq équations : les quatre équations de Maxwell et l'expression de la force de Lorentz.

Ces équations sont (sous leur forme locale)

L'équation de Maxwell Gauss

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.1}$$

L'équation de Maxwell flux magnétique

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0 \tag{1.2}$$

L'équation de Maxwell Faraday

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$

L'équation de Maxwell Ampère

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.4}$$

La force de Lorentz

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{1.5}$$

Ces équations portent le nom d'*équations de Maxwell dans le vide.* Cette dénomination est trompeuse car ces équations sont valables tout le temps. Elles s'appliquent en présence de charges et de courant c'est à dire dans un vide qui contient de la matière. On les nomme ainsi par opposition aux *équations de Maxwell dans les milieux* que l'on étudiera au second semestre.

1.2. Charges, courants et champs

Charge lectrique

Au niveau microscopique, les charges sont ponctuelles. Leur valeur est toujours un multiple entier de la charge élmentaire $e \simeq 1.6 \times 10^{-19} C$. Tout système physique est une collection de charges individuelles ponctuelles (même en mécanique quantique). Toutefois pour un système macroscopique, le nombre est tellement grand que l'on utilisera une description continue en terme de densité volumique de charge ρ.

Il est important de pouvoir passer de la description en terme de charges discrètes à une représentation continue. Pour faire le lien entre les expressions concernant des distributions continues de charge et les distribution discrètes, on étudie ce qui se passe dans un volume $\mathcal{V}$.

$$Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\left(\vec{r}\right) d^3\vec{r} = \sum_{i \in \mathcal{V}} q_i \tag{1.6}$$

On en déduit l'expression de la densité moyenne en considérant un volume $\mathcal{V}$ assez petit pour que les charges y soient réparties de manière homogène

$$\rho = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i \in \mathcal{V}} q_i \tag{1.7}$$

Courant électrique

Le courant I qui traverse une surface $\mathcal{S}$ est le flux du vecteur densité de courant $\vec{j}$:

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S}. \tag{1.8}$$

Une densité volumique de charge ρ animée d'une vitesse $\vec{v}$ produit une densité de courant $\vec{j}$ égale à :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \tag{1.9}$$

La densité de courant d'une distribution de charges ponctuelles q_i animées chacune d'une vitesse $\vec{v}_i$ est

$$\vec{j} = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i \in \mathcal{V}} q_i \vec{v}_i. \tag{1.10}$$

Conservation de la charge électrique

La charge électrique est une quantité qui se conserve. La variation temporelle de la charge située dans un volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface fermée $\mathcal{S}$ est le courant électrique qui traverse cette surface :

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_{\mathcal{V}} \rho d^3\vec{r}\right) = -\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}. \tag{1.11}$$

La relation locale exprimant la conservation de la charge est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0. \tag{1.12}$$

Champ électrique Champ magnétique

Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N A^{-2} \tag{1.13}$$

Il s'agit d'une valeur exacte qui résulte de la définition de l'Ampère

Permittivité electrique du vide

$$\varepsilon_0 = 8.854187817... \cdot 10^{-12} F m^{-1} \tag{1.14}$$

Il s'agit aussi d'une valeur exacte depuis que le mètre est défini à partir de la vitesse de la lumière.

1.3. Contenu physique des équations de Maxwell

Chacune de ces équations prises individuellement décrit un effet physique. La forme intégrale des équations de Maxwell permet de reconnaitre facilement cet effet.

Equation de Maxwell Gauss

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.15}$$

Sous forme intégrale on reconnait le théorème de Gauss :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \tag{1.16}$$

$$Q = \iiint_{V} \rho \, d\tau. \tag{1.17}$$

Cette équation, est la même qu'en électrostatique. Elle exprime la manière dont les charges électriques sont à l'origine du champ électrique.

Maxwell flux magnétique

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Par analogie avec l'équation précédente on déduit que cette équation exprime qu'il n'existe pas de charge magnétique :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \tag{1.18}$$

Maxwell Ampère

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.19}$$

Sous forme intégrale il s'agit du théorème d'Ampère.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_\Sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \tag{1.20}$$

$$I = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot d\vec{S} \tag{1.21}$$

Lorsque le champ électrique est stationnaire, il n'y a que le terme $\mu_0 I$ et on reconnait le théorème d'Ampère de la magnétostatique. Dans le cas général, le second terme est appelé courant de déplacement.

Cette équation exprime la manière dont un courant électrique est à l'origine d'un champ magnétique. On remarquera qu'un champ électrique dépendant du temps crée lui aussi un champ magnétique.

Maxwell Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cette équation décrit le phénomène d'induction : un champ magnétique variable est à l'origine d'un champ électrique. Ce champ est dénommé champ électromoteur :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$$\Phi = \iint_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

1.4. Propriétés et conséquences des équations de Maxwell

Le théorème de superposition

Les équations de Maxwell sont des équations linéraires en $\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ et $\vec{j}$.

Cohérence des équations

Si jusqu'à présent, les équations de Maxwell ont été séparément, chacune a permis de rendre compte d'un effet physique : la création d'un champ électrique par les charges électriques, l'absence de charge magnétique, la création d'un champ magnétique par un courant électrique et le phénomène d'induction. Le génie de Maxwell a été de comprendre qu'il s'agit d'un tout et que ces équations doivent être considérées comme un ensemble.

Prises ensembles plutôt qu'individuellement, ces équations contiennent beaucoup plus que ces phénomènes.

L'exemple le plus simple s'obtient en combinant Maxwell Ampère et Maxwell Gauss : on écrit Maxwell Ampère

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.22}$$

on prend la divergence

$$\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}\right) = \mu_0 \text{div}\vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \text{div}\vec{E}}{\partial t} \tag{1.23}$$

le premier terme est nul car la divergence d'un rotationnel est nulle. Le troisième terme peut se réécrire grâce à Maxwell Gauss. Au final :

$$\text{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.24}$$

On obtient l'équation qui rend compte de la conservation de la charge. Ainsi, cette propriété n'est pas à ajouter, elle est déjà contenue dans les équations de Maxwell.

Existence d'ondes électromagnétiques

En électrostatique, le champ électrique est dû à la présence de charges électriques : sans charge électrique, pas de champ électrique. En magnétostatique le champ magnétique est dû à la présence de courants électriques : sans courant électrique, pas de champ magnétique.

Lorsque l'on étudie des situations dynamiques où les différentes grandeurs dépendent du temps, on peut écrire Maxwell Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.25}$$

Si le champ magnétique dépend du temps on peut avoir un champ électrique avec une densité de charge électrique ρ nulle. Il suffit qu'il y ait un courant électrique :

$\vec{j}$ dépend de $t \rightarrow \vec{B}$ dépend de $t \rightarrow \vec{E}$ dépend de t .

On peut encore avoir plus et imaginer l'existence d'un champ électrique et d'un champ magnétique en l'absence de charge et de courant.

Maxwell Faraday dit que $\vec{B}$ qui dépend du temps crée $\vec{E}$ (qui dépend donc aussi du temps) Et Maxwell Ampère dit que $\vec{E}$ qui dépend du temps crée $\vec{B}$. Le champ électromagnétique acquièrt une existence autonome par rapport aux charges. Il est bien sûr nécessaire d'avoir initialement des charges et des courants pour créer une onde électromagnétique, mais dès que celle ci est émise, son existence ne dépend plus de ces charges et courants.

2. Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

Dans tout ce chapitre, on se place en l'absence de charges et de courants.

2.1. Equation de propagation du champ électrique

Les équations de Maxwell couplent l'évolution du champ électrique et du champ magnétique. En les combinant on peut obtenir une équation d'évolution pour le champ électrique seul. Prenons la dérivée temporelle de Maxwell-Ampère :

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \tag{2.1}$$

Exprimons la dérivée temporelle de $\vec{B}$ à l'aide de Maxwell-Faraday

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\right) = -\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}\right). \tag{2.2}$$

Enfin Maxwell Gauss nous dit qu'en l'absence de charge la divergence du champ électrique est nulle. L'équation d'évolution du champ électrique est une équation de d'Alembert qui décrit la propagation d'ondes :

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{2.3}$$

2.2. La propagation d'ondes scalaires

2.2.1. Propagation à une dimension

L'équation de propagtion à une dimension d'un champ scalaire φ est

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{2.4}$$

Les solutions de cette équation sont

$$\varphi\left(z,t\right) = f\left(z-ct\right) + g\left(z+ct\right). \tag{2.5}$$

Une méthode de résolution qui permet de s'assurer que l'on a bien toutes les solutions consiste à effectuer le changement de variables suivant

$$\psi(u,v) = \varphi(z,t), \tag{2.6}$$
$$u = z - ct, \tag{2.7}$$
$$v = z + ct. \tag{2.8}$$

La fonction ψ vérifie alors l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0 \tag{2.9}$$

2.2.2. Description des solutions

La solution f correspond à une onde qui se propage sans se déformer vers les z croissants. La solution g est une onde qui se propage vers les z décroissants.

2.2.3. Propagation à trois dimensions

A trois dimensions les solutions sont beaucoup plus compliquées qu'à une dimension. En particulier, il n'est pas possible de simplifier le problème à l'aide d'un changement de variables.

On peut toutefois trouver des solutions particulières qui vérifient certaines propriétés de symétrie.

Ondes planes progressives

Le champ ne dépend que d'une coordonnée. Il peut s'agir d'un axe, par exemple l'axe z

$$\Phi(x,y,z,t) = \varphi(z,t), \tag{2.10}$$

ou bien d'un axe quelconque de vecteur unitaire $\vec{u}$

$$\Phi(x,y,z,t) = \varphi(\vec{u}\cdot\vec{r},t). \tag{2.11}$$

Le champ Φ est constant sur des plans orthogonaux à la direction de propagation $\vec{u}$.

Le champ $\varphi(z,t)$ vérifie l'équation de propagation à une dimension dont nous connaissons toutes les solutions. Si l'on choisit de ne conserver que les solutions qui vont dans la direction et le sens du vecteur unitaire $\vec{u}$, les solutions en onde plane s'écrivent

$$\Phi(x,y,z,t) = f(\vec{u}\cdot\vec{r} - ct). \tag{2.12}$$

Ondes sphériques

Le champ ne dépend que de la distance r du point considéré avec l'origine

$$\Phi(\vec{r},t) = \psi(r,t). \tag{2.13}$$

Pour une fonction qui ne dépend que de r le laplacien a une forme relativement simple :

$$\Delta\Phi\left(\vec{r},t\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\psi\left(r,t\right)\right). \tag{2.14}$$

La fonction ψ verifie l'équation d'évolution suivante

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\psi\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(r\psi\right)=0. \tag{2.15}$$

Par conséquent la fonction $r\psi$ vérifie l'équation de d'Alembert à une dimension dont nous connaissons les solutions. Nous en déduisons la solution en ondes sphériques :

$$\psi\left(r,t\right)=\frac{f\left(r-ct\right)}{r}+\frac{g\left(r-ct\right)}{r}. \tag{2.16}$$

Le premier terme (fonction f) corrspond à une onde qui s'éloigne de l'origine. Cette onde est appelée onde sortante. Le second correspond à une onde qui converge vers l'origine, il s'agit d'une onde entrante.

Solutions stationnaires

Le théorème de superposition permet de construire une nouvelle solution comme combinaison linéaire de deux solutions. L'espace des solutions est ainsi un espace vectoriel. Pour le connaitre, il suffit en fait de connaitre une base. Diverses méthodes permettent de trouver de telles bases. Celles ci reposent sur l'utilisation de la transformée de Fourier ou plus généralement de l'analyse harmonique. Il s'agit de trouver les solutions stationnaires.

2.3. Ondes électromagnétiques planes progressives

Retour sur la propagation du champ électrique

Les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide avec la célérité c :

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}. && (2.17)\\ &= 299\ 792\ 458\ m\ s^{-1} && (2.18)\end{aligned}$$

Il s'agit d'une valeur exacte depuis la définition du mètre adoptée en 1983. La valeur de la perméabilité magnétique du vide μ_0 est aussi une valeur exacte car elle repose sur la définition de l'Ampère. Par conséquent, la valeur de la permittivité électrique du vide ε_0 est elle aussi exacte.

Les solutions en onde plane

Chacune des composantes du champ électrique et du champ magnétique vérifie l'équation de d'Alembert. Intéressons nous aux solutions particulières pour lesquelles toutes ces composantes sont des ondes planes progressives se dirigeant selon la direction et le sens d'un vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$\vec{E}\,(\vec{r},t) = \vec{e}\,(\vec{u}\cdot\vec{r}-ct)\,, \tag{2.19}$$

$$\vec{B}\,(\vec{r},t) = \vec{b}\,(\vec{u}\cdot\vec{r}-ct)\,. \tag{2.20}$$

Ce champ électromagnétique est solution de l'équation de d'Alembert. C'est une condition nécessaire pour être solution de l'équation de Maxwell, mais cette condition n'est pas suffisante. Il nous faut maintenant revenir aux équations de Maxwell pour finir le travail. Pour des ondes planes progressives, la dérivée temporelle, la divergence et le rotationnel prennent des formes particulièrent simples :

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\,(\vec{r},t) = -c\,\vec{e}\,'\,(\vec{u}\cdot\vec{r}-ct)\,, \tag{2.21}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{E}\,(\vec{r},t) = \vec{u}\cdot\vec{e}\,'\,(\vec{u}\cdot\vec{r}-ct)\,, \tag{2.22}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E}\,(\vec{r},t) = \vec{u}\times\vec{e}\,'\,(\vec{u}\cdot\vec{r}-ct)\,, \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\,(\vec{r},t) = -c\,\vec{b}\,'\,(\vec{u}\cdot\vec{r}-ct)\,, \tag{2.24}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{B}\,(\vec{r},t) = \vec{u}\cdot\vec{b}\,'\,(\vec{u}\cdot\vec{r}-ct)\,, \tag{2.25}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E}\,(\vec{r},t) = \vec{u}\times\vec{b}\,'\,(\vec{u}\cdot\vec{r}-ct) \tag{2.26}$$

Dans les intégrations, nous considérerons que les constantes d'intégration qui interviennent sont nulles (elles correspondent à un champ statique uniforme dans tout l'espace)

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{div}\ \vec{E}=0 & \rightarrow & \vec{u}\cdot\vec{e}\,'=0 & \rightarrow & \vec{u}\cdot\vec{E}=0 \\
\mathrm{div}\ \vec{B}=0 & \rightarrow & \vec{u}\cdot\vec{b}\,'=0 & \rightarrow & \vec{u}\cdot\vec{B}=0 \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \rightarrow & \vec{u}\times\vec{e}\,'=c\,\vec{b}' & \rightarrow & \vec{u}\times\vec{E}=c\,\vec{B} \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \rightarrow & \vec{u}\times\vec{b}\,'=-\frac{1}{c}\vec{e}\,' & \rightarrow & \vec{u}\times\vec{B}=-\frac{1}{c}\vec{E}
\end{array} \tag{2.27}$$

Nous pouvons donc récapituler les propriétés du champ électrique et du champ magnétique pour une *onde plane progressive.*
` Attention, les remarques qui suivent ne sont valables que pour des ondes planes progressives.

- Le champ électrique et la champ magnétique sont orthogonaux à la direction de propagation. On dit que ce sont des champs transverses
- Le champ électrique et le champ magnétique sont orthogonaux entre eux.
- Le trièdre $\left(\vec{u},\vec{E},\vec{B}\right)$ formé de la direction de propagation, du champ électrique et du champ magnétioque est un trièdre direct.
- Le module du champ électrique est c fois plus grand que celui du champ magnétique

2.4. Onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée linéairement

2.4.1. Structure du champ électrique

Pour discuter précisément de la structure du champ électrique et du champ magnétique on considère une onde qui se propage dans la direction Oz vers les z croissants et dont le champ électrique est aligné selon Ox.

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}(z - ct) + \varphi_0\right)\vec{u}_x = E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi_0)\,\vec{u}_x \tag{2.28}$$

- Il s'agit d'un onde monochromatique dont la *pulsation* est ω.
- L'évolution du champ électrique est périodique de *période* T.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2.29}$$

- La dépendance spatiale est harmonique, elle est caractérisée par le *nombre d'onde* k .

$$k = \frac{\omega}{c} \tag{2.30}$$

- A un instant donné, la distribution du champ électrique est spatialement périodique. La période spatiale est la longueur d'onde λ.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{2.31}$$

L'onde plane se propage à la célérité c sans se déformer. Le champ électrique redevient égal à sa valeur initiale
- aprés s'etre propagé sur une distance égale à la longueur d'onde λ
- au bout d'une période temporelle T. C'est à dire après s'etre paropagé de cT.

On en déduit la relation entre longueur d'onde et période spatiale

$$\lambda = cT \tag{2.32}$$

En un point donnée le champ électrique oscille selon un segment de droite parallèle à $\vec{u}_x$. On dira que l'onde est polarisée linéairement selon l'axe Ox .

Plus généralement, on appelle polarisation l'évolution de la direction du champ électrique en fonction du temps en un point donné de l'espace.

Pour une onde électromagnétique plane monochromatique polarisée linéairement, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{z} - \omega t + \varphi_0\right)\vec{u} \tag{2.33}$$

Le vecteur $\vec{k}$ est le vecteur d'onde, il définit la direction de propagation de l'onde. Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur unitaire orthogonal à la direction de propagation, il définit la direction du champ électrique c'est à dire la polarisation de l'onde.

2.4.2. Champ magnétique

Le champ magnétique se déduit de l'équation de Maxwell Faraday

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.34}$$

$$\left| \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \times \left| \begin{array}{c} E_0 \cos\left(kx - \omega t + \varphi_0\right) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} 0 \\ -kE_0 \sin\left(kx - \omega t + \varphi_0\right) \\ 0 \end{array} \right. \tag{2.35}$$

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \cos\left(kx - \omega t + \varphi_0\right) \vec{u}_y \tag{2.36}$$

3. Ondes monochromatiques

3.1. Ondes monochromatiques et notation complexe

3.1.1. Pourquoi s'intéresser aux ondes monochromatiques ?

Ce sont les multiples conséquences du fait que les équations de Maxwell sont des équations linéaires.

Les modes propres du champ électromagnétique ont un évolution sinusoïdale.

La réponse du champ électromagnétique à une excitation sinusoidale est elle même sinusoidale.

L'utilisation combinée de la transformation de Fourier et du théorème de superposition permet de décomposer toute onde électromagnétique en composantes de Fourier qui correspondent à des ondes monochromatiques.

3.1.2. La notation complexe

Toute grandeur sinusoidale $A(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$A(t) = A_0 \cos(\varphi_0 - \omega t) \tag{3.1}$$

A_0 est l'amplitude de la grandeur A et φ_0 sa phase.

On associe à la grandeur physique $A(t)$ une grandeur complexe $\mathcal{A}(t)$ définie par

$$\mathcal{A}(t) = A_0 \ e^{i(\varphi_0 - \omega t)}. \tag{3.2}$$

La grandeur physique $A(t)$ est la partie réelle de la grandeur complexe $\mathcal{A}(t)$

$$A(t) = \Re(\mathcal{A}(t)). \tag{3.3}$$

On défini l'amplitude complexe $\mathcal{A}_0$ comme :

$$\mathcal{A}_0 = A_0 e^{i\varphi_0} \tag{3.4}$$

de sorte que

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0 \ e^{-i\omega t}. \tag{3.5}$$

Remarque 1

On dispose de deux choix pour définir la notation complexe car un cosinus est la somme de deux exponentielles conjuguées. On rencontre en pratique les deux choix possibles.

La convention dépend des traditions du domaine étudié. En électricité il est de coutume d'écrire

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0 e^{i\omega t}. \tag{3.6}$$

En électromagnétisme on préfère souvent

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0\ e^{-i\omega t}. \tag{3.7}$$

C'est ce choix qui sera fait dans toute la suite du cours.

Remarque 2

Il est important de toujours se rappeler que la notation complexe est une convention. Pour éviter toute confusion, chaque fois que l'on utilise la notation complexe on écrira le passage complexe→réel et réel→complexe.

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0 \cos(\varphi_0 - \omega t) && (3.8) \\ \mathcal{A}(t) &= A_0\ e^{i(\varphi_0 - \omega t)} && (3.9) \end{aligned}$$

La notion d'amplitude complexe est extrémement utile, que ce soit d'un point de vue pratique pour calculer ou d'un point de vue plus conceptuel pour comprendre les phénomènes. Toutefois, il est essentiel de ne pas oublier que les quantités physiques sont des grandeurs réelles.

Remarque 3

Il n'est pas toujours possible d'utiliser des lettres calligraphiques, par exemple quand on a des quantités décrites par des minuscules. On utilise alors souvent la notation suivante :

$$\begin{aligned} \underline{a(t)} &= a_0\ e^{i(\varphi_0 - \omega t)} && (3.10) \\ \underline{a_0} &= a_0\ e^{i\varphi_0} && (3.11) \\ a(t) &= \Re\left(\underline{a(t)}\right) && (3.12) \end{aligned}$$

Remarque 4

Pour une onde monochromatique, il est possible d'écrire l'amplitude complexe en fonction de l'amplitude réelle de la manière suivante :

$$\mathcal{A}(t) = A(t) + iA\left(t + \frac{T}{4}\right). \tag{3.13}$$

Par consequent, si la fonction $A(t)$ est solution d'une équation d'évolution linéaire indépendante du temps, l'amplitude complexe $\mathcal{A}(t)$ le sera aussi.

3.2. Onde électromagnétique monochromatique

Onde scalaire, onde vectorielle

L'amplitude d'une onde monochromatique scalaire s'écrit

$$A(\vec{r},t) = \Re\left(\mathcal{A}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\right) \tag{3.14}$$

ce qui correspond à la grandeur réelle

$$A(\vec{r},t) = A_0(\vec{r})\cos(\varphi_0(\vec{r}) - \omega t)$$

$A_0(\vec{r})$ est l'amplitude de l'onde au point $\vec{r}$ et $\varphi_0(\vec{r})$ la phase de l'onde au point $\vec{r}$.

Les surfaces $\varphi_0(\vec{r}) = cste$ sont appelées surfaces d'onde. Lorsque ce sont des plans, on parle d'onde plane, lorsque ce sont des sphères, d'onde sphérique.

Pour un champ vectoriel comme le champ électrique, chacune des composantes peut s'écrire sous cette forme. Cela donne l'écriture compacte

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \Re\left(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\right). \tag{3.15}$$

Attention à ne pas se laisser emporter par la simplicité de cette écriture. Le champ réel s'écrit

$$E_x(\vec{r},t) = E_{0x}(\vec{r})\cos(\varphi_x(\vec{r}) - \omega t) \tag{3.16}$$
$$E_y(\vec{r},t) = E_{0y}(\vec{r})\cos(\varphi_y(\vec{r}) - \omega t) \tag{3.17}$$
$$E_z(\vec{r},t) = E_{0z}(\vec{r})\cos(\varphi_z(\vec{r}) - \omega t) \tag{3.18}$$

Les phases $\varphi_x(\vec{r})$, $\varphi_y(\vec{r})$ et $\varphi_z(\vec{r})$ sont a priori différentes. C'est seulement lorsque ces phases sont égales que l'on peut écrire le champ électrique sous la forme suivante :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r},t)\cos(\varphi_0(\vec{r}) - \omega t). \tag{3.19}$$

Dans cette situation, la polarisation du champ électromagnétique est linéaire en chaque point de l'espace.

Equation d'onde

Pour une onde monochromatique $A(\vec{r},t)$, la dérivée temporelle est :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A(\vec{r},t) = -\omega^2 A(\vec{r},t) \tag{3.20}$$

Par conséquent l'équation de propagation devient

$$\Delta\mathcal{A}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}\mathcal{A}(\vec{r}) = 0 \tag{3.21}$$

Cette équation porte le nom d'équation de Dirichlet. On la retrouve en physique sous de très nombreuses formes lorsque l'on s'intéresse aux solutions stationnaires : équation de la chaleur (transfert thermique, diffusion), équation de Schrödinger.

Ondes planes progressives monochromatiques

On peut enfin s'intéresser aux ondes planes progressives monochromatiques de la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\vec{r},t) &= A_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi_0\right)} &(3.22)\\ &= A_0 \exp i\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0\right). &(3.23)\end{aligned}$$

Les dérivées partielles selon les composantes cartésiennes sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}(\vec{r},t) &= ik_x\mathcal{A}(\vec{r},t), &(3.24)\\ \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{A}(\vec{r},t) &= ik_y\mathcal{A}(\vec{r},t), &(3.25)\\ \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{A}(\vec{r},t) &= ik_z\mathcal{A}(\vec{r},t). &(3.26)\end{aligned}$$

Par conséquent, l'opérateur différentiel $\vec{\nabla}$ en coordonnées cartésiennes est particulièrement simple

$$\vec{\nabla} \to i\vec{k}. \qquad (3.27)$$

Attention, cette relation n'est vraie que pour des ondes planes progressives monochromatiques.

Les différents opérateurs s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}(\vec{r},t) &= -i\omega\;\mathcal{A}(\vec{r},t) &(3.28)\\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\;\mathcal{A}(\vec{r},t) &= i\vec{k}\;\mathcal{A}(\vec{r},t), &(3.29)\\ \mathrm{div}\;\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) &= i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t), &(3.30)\\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) &= i\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t). &(3.31)\end{aligned}$$

Lorsqu'on les appliquent à des ondes planes progessives monochromatiques, les équations de Maxwell deviennent

$$\begin{aligned}i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, &(3.32)\\ i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{B}} &= 0, &(3.33)\\ i\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}} &= i\omega\vec{\mathcal{B}}, &(3.34)\\ i\vec{k}\times\vec{\mathcal{B}} &= \mu_0\underline{\vec{j}} - i\frac{\omega}{c^2}\vec{\mathcal{E}}. &(3.35)\end{aligned}$$

En combinant ces équations prises en l'absence de charge et de courant, on retrouve la relation entre ω et $\vec{k}$

$$i\vec{k}\times\left(i\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}\right) = i\vec{k}\times\left(i\omega\vec{\mathcal{B}}\right), \qquad (3.36)$$

soit

$$\frac{\omega^2}{c^2}\vec{\mathcal{E}} = i\vec{k}\left(i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}\right) - \left(i\vec{k}\cdot i\vec{k}\right)\vec{\mathcal{E}} = \left\|\vec{k}\right\|^2\vec{\mathcal{E}} \qquad (3.37)$$

Soit

$$\omega = \left\|\vec{k}\right\| c. \tag{3.38}$$

On retrouve par ailleurs les relations que nous avions déjà établies dans le cas des ondes planes progressives (mais pas nécessairement monochromatiques) dans le vide :

$$\begin{array}{cc} i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}} = 0, & i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{B}} = 0, \\ \vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{\mathcal{E}}, & \vec{\mathcal{E}} = -c\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{\mathcal{B}}. \end{array}$$

3.3. Décomposition d'une onde en ondes monochromatiques

3.3.1. Série de Fourier

Toute fonction $f(t)$ réelle, périodique de période $T = 2\pi/\omega$ peut s'écrire comme somme de fonctions sinusoïdales de période T/n où n est un entier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right] \tag{3.39}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n\cos(n\omega t + \phi_n) \tag{3.40}$$

avec

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \tag{3.41}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt. \tag{3.42}$$

$\frac{a_0}{2}$ est la valeur moyenne de f sur une période. Les termes en ωt constituent la composante fondamentale tandis que les autres termes sont les harmoniques. L'ensemble des (a_n, b_n) pour tous les n est appelé spectre de f. On parle ainsi de décomposition spéctrale de f.

En notation complexe on a

$$f(t) = \Re\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}_n e^{-in\omega t}\right) \tag{3.43}$$

3.3.2. Transformation de Fourier

La théorie mathématique nécessaire pour travailler sans ambiguité avec la transformée de Fourier est la théorie des distributions. On utilisera un bon nombre de résultats sans donner trop de précision, mais en cas de doute sur le résultat d'un calcul, il est trés fortement conseillé d'aller voir dans les ouvrages de mathématiques.

De même que pour la notation complexe, il y a plusieur conventions pour la définition de la transformée de Fourier. Nous utiliserons la suivante : la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ sera notée $f[\omega]$. La fonction $f(t)$ et sa transformée de Fourier sont reliées par les relations suivantes

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f[\omega]\, e^{-i\omega t}, \tag{3.44}$$

$$f[\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ f(t)\, e^{i\omega t}. \tag{3.45}$$

Pour une fonction qui dépend de l'espace, on défini la transformée de Fourier spatiale par

$$g(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} g\left[\vec{k}\right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \tag{3.46}$$

$$g\left[\vec{k}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{r}\ g(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \tag{3.47}$$

On remarquera que la convention de signe dans l'exponentielle est opposée à celle qui a été choisie pour le temps cela provient de la décomposition d'une onde en onde planes

$$f(z-ct) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} f[k]\, e^{ik(z-ct)}, \tag{3.48}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} f[k]\, e^{ikz-i\omega t} \tag{3.49}$$

$$= \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f\left[\frac{\omega}{c}\right] e^{ikz-i\omega t} \tag{3.50}$$

Remarque

Voici les autres conventions qui sont aussi utilisées. Si l'on souhaite mettre en évidence la réciprocité entre transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ f[\omega]\, e^{-i\omega t}, \tag{3.51}$$

$$f[\omega] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ f(t)\, e^{i\omega t}. \tag{3.52}$$

Si l'on souhaite mettre en avant la fréquence plutot que la pulsation

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu\ f[\nu]\, e^{-2\pi i\nu t}, \tag{3.53}$$

$$f[\nu] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ f(t)\, e^{2\pi i\nu t}. \tag{3.54}$$

3.4. Les différents types d'ondes électromagnétiques

Les frontières qui sont données ici sont des frontières floues.

Ondes radio et microondes

Ce sont les ondes électromagnétiques dont la longueur d'onde est plus grande que le milimètre. Il s'agit des ondes radio pour les longueurs d'onde supérieures au décimètre et les microondes pour les longueurs d'onde entre le millimètre et le décimètre.

Gamme d'ondes	λ (vide)	fréquence
millimétriques	1 mm à 10 mm	30 GHz à 300 GHz
centimétriques ou hyperfréquences	1 cm à 10 cm	3 GHz à 30 GHz
décimétiques	1 dm à 10 dm	300 MHz à 3 GHz
métriques	1 m à 10 m	30 MHz à 300 MHz
décamétriques ou ondes courtes	10 m à 100 m	3MHz à 30 MHz
hectométriques ou ondes moyennes	100 m à 1000 m	300 KHz à 3 MHz
kilométriques ou grandes ondes	1 km à 10 km	30 KHz à 300 KHz
myriamétriques	10 km à 30 km	10 KHz à 30 KHz

Le four à microondes est un sous produit du radar. Les microondes utilisées ont une fréquence de 2,54 GHz. Elles sont résonantes avec une fréquence de transition de la molécule d'eau.

Ondes millimétriques 1 mm à 10 mm, 30 GHz à 300 GHz.
EHF : Extra Hautes Fréquences.

Ondes centimétriques ou hyperfréquences 1 cm à 10 cm, 3 GHz à 30 GHz.
SHF : Super Hautes Fréquences. Satellites de télécommunication.

Ondes décimétriques 1 dm à 10 dm, 300 MHz à 3 GHz.
UHF : Ultra Hautes Fréquences Télévision, radars, téléphone GSM (Bande 900MHz et 1800 MHz).

Ondes métriques 1 m à 10 m, 30 MHz à 300 MHz.
THF : Très Hautes Fréquences ou VHF : Very High Frequencies Télévision et radio en modulation de fréquence, communications de la police et de l'armée.

Ondes décamétriques ou courtes 10 m à 100 m, 3 MHz à 30 MHz.
HF : Hautes Fréquences. CB et radio à grande portée.

Ondes hectométriques ou moyennes 100 m à 1000 m, 300 KHz à 3 MHz.
MF : Moyennes Fréquences. Radio.

Ondes kilométriques ou grandes ondes 1 km à 10 km, 30 KHz à 300 KHz
BF : Basses Fréquences. Radio.

Infrarouge

L'infrarouge s'étend entre les microondes et le visible. L'infrarouge est trés souvent associé au rayonnement thermique. C'est en effet dans cette gamme que les corps à température ambiante rayonnent. On distingue trois types de rayonnement infrarouge :

Gamme d'ondes	λ (vide)	gamme de température
infrarouge proche	$0.7\mu m$ à $5\mu m$	740 K à 3000 K
infrarouge moyen	$5\mu m$ à 30 μm	100 K - 740 K
infrarouge lointain	30 μm à 200 μm	10K à 100K

En astronomie, l'infrarouge permet d'observer des objets trop froids pour rayonner dans le visible.

Infrarouge proche
Rayonnement des géantes rouges et des étoiles rouges froides.

Infrarouge moyen
Planètes comètes et astéroides. Poussières chauffées par les étoiles. Caméras thermiques : détection de pannes, analyse des pertes thermiques.

Infrarouge lointain
Emission de poussières froides. Régions centrales des galaxies

Visible

Longueurs d'onde comprises entre 380 nm et 770 nm

violet	400 nm	450 nm
bleu	450 nm	520 nm
vert	520 nm	560 nm
jaune	560 nm	600 nm
orange	600 nm	630 nm
rouge	630 nm	750 nm

Ultraviolet

Longueurs d'onde inférieure à celles de la lumière visible.

ultraviolet proche	300 nm à 400 nm	UVA (400-315 nm)
ultraviolet moyen	200 à 300 nm	UVB (315-280 nm) UVC (280-185 nm)
ultraviolet lointain	90 à 200 nm	

Ultraviolet proche

UVA : Coup de soleil retardé, pigmentation instantanée, fluorescence.

Ultraviolet moyen

UVB : Coup de soleil précoce, pigmentation retardée, aide à produire la vitamine D.
UVC : Pouvoir bactéricide trés élevé.

Rayons X

On distingue deux types de rayon X, les " X mous " avec une longueur d'onde de 5 à 100 Å et les " X durs " avec une longueur d'onde de 0.01 à 0.5 Å

Rayons γ

Les rayons gamma sont des ondes électromagnétiques de longueur d'onde trés faible allant de $10^{-12}m$ à 10^{-14} m. Ils sont produits par des réactions nucléaires.

4. Energie électromagnétique

4.1. Densité volumique d'énergie électromagnétique

Energie potentielle d'un système de charges

La première approche de l'énergie en électrostatique conduit à étudier l'énergie d'interaction d'un système de charges. Deux charges q_1 et q_2 séparées d'une distance r ont une énergie d'interaction U_{12} égale à

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{4.1}$$

Il s'agit d'une énergie potentielle d'interaction. On est ensuite conduit à introduire le potentiel électrostatique V créé par une distribution de charges. L'énergie potentielle d'une charge q placée dans ce potentiel au point $\vec{r}$ est alors

$$U = q_1 V\left(\vec{r}\right). \tag{4.2}$$

L'énergie d'intéraction d'un sytème de N charges est :

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i, \tag{4.3}$$

où V_i est le potentiel electrostatique créé par toutes lesautres charges au point où se trouve la charge i.

Densité locale d'énergie électrostatique

L'énergie électrostatique d'un condensateurde capacité C est

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CU^2. \tag{4.4}$$

La capacité d'un condensateur plan dont les armatures sont séparées par du vide est

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}, \tag{4.5}$$

où S est la surface des armatures et e l'épaisseur du condensateur. L'énergie électrostatique s'écrit donc

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S e \left(\frac{U}{e}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2}{2}\mathcal{V} \tag{4.6}$$

où $\mathcal{V}$ est le volume se trouvant entre les armatures du condensateur et $\vec{E}$ le champ électrique qui y règne. Puisque le champ électrique est uniforme à l'intérieur du condensateur et nul ailleurs, on peut donner une nouvelle interprétation à l'énergie électrostatique. Il s'agit d'une énergie stockée dans le champ lui même. La densité volumique d'énergie électrostatique $\mathcal{U}_e$ stockée dans le champ est ainsi :

$$\mathcal{U}_e = \frac{\varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2}{2} \tag{4.7}$$

$$\mathcal{E}_e = \iiint \mathcal{U}_e \, d\tau. \tag{4.8}$$

Energie magnétique

De la même manière on peut s'intéresser à l'énergie magnétique d'un solénoide.

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L I^2. \tag{4.9}$$

L'inductance L d'un solenoide de longueur l, dont la surface de la section est S et qui comporte N spires est :

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}. \tag{4.10}$$

L'intensité du champ magnétique $\vec{B}$ qui règne à l'intérieur est :

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I. \tag{4.11}$$

Par conséquent, tout comme pour l'énergie du condensateur, on peut mettre l'énergie de la bobine sous forme d'un produit de son volume $\mathcal{V}$ par une densité d'énergie magnétique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{\left|\vec{B}\right|^2}{2\mu_0} \mathcal{V} \tag{4.12}$$

La densité volumique d'énergie magnétique $\mathcal{U}_m$ stockée dans le champ est ainsi :

$$\mathcal{U}_m = \frac{\left|\vec{B}\right|^2}{2\mu_0} \tag{4.13}$$

$$\mathcal{E}_m = \iiint \mathcal{U}_m \, d\tau. \tag{4.14}$$

Les expressions que nous venons d'écrire pour le champ électrique et ou le champ magnétique nous permettrons d'interpréter l'expression que nous allons obtenir en réalisant le bilan énergétique complet du champ électromagnétique.

4.2. Le vecteur de Poynting

L'énergie est une grandeur qui se conserve. En presence de charges et de courants, il peut y avoir un échange d'énergie entre la matière : l'énergie électromagnétique est transformée en énergie mécanique ou réciproquement. En l'absence de charges et de courants, l'énergie électromagnétique est une quantité qui se conserve.

Pour exprimer cette conservation, il faut introduire un vecteur densité de courant d'énergie. Ce vecteur est appelé vecteur de Poynting et il est noté $\vec{\Pi}$. Si l'on note $\mathcal{U}$ la densité volumique d'énergie électromagnétique, la relation de conservation est :

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{U}\ d\tau\right) = -\oiint_{\Sigma} \vec{\Pi}\cdot d\vec{S}. \tag{4.15}$$

La relation de conservation locale s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{\Pi} = 0. \tag{4.16}$$

Le vecteur de Poynting est un vecteur qui représente la densité de courant d'énergie. Autrement dit, la puissance électromagnétique $\mathcal{P}$ qui traverse une surface $\mathcal{S}$ est le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface :

$$\mathcal{P} = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi}\cdot d\vec{S}. \tag{4.17}$$

Lorsque l'on parle d'un faisceau lumineux, on appelle intensité cette puissance et on la note $\mathcal{I}$. La surface Σ considérée doir intersecter totalement le faisceau lumineux.

4.3. Expression de l'énergie électromagnétique

Calculons la divergence du produit vectoriel du champ électrique et du champ magnétique

$$\mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ E\right) - \vec{E}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B}\right) \tag{4.18}$$

Soit, en utilisant Maxwell Ampère et Maxwell Faraday dans le vide :

$$\mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E}\cdot\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \tag{4.19}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\left|\vec{B}\right|^2}{2} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\left|\vec{E}\right|^2}{2}\right) - \mu_0\vec{E}\cdot\vec{j}. \tag{4.20}$$

ou encore, en divisant par μ_0

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\frac{\left|\vec{E}\right|^2}{2} + \frac{\left|\vec{B}\right|^2}{2\mu_0}\right) + \mathrm{div}\left(\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\right) = -\vec{E}\cdot\vec{j}. \tag{4.21}$$

En l'absence de courants ($\vec{j} = 0$), nous pouvons reconnaitre l'énergie électrostatique et déduire l'expression du vecteur de Poynting. Dans les régimes dépendant du temps, l'énergie électromagnétique a la même expression que dans les régimes statiques : c'est la somme de l'énergie électrique et de l'énergie magnétique

$$\mathcal{U}_{em} = \varepsilon_0 \frac{\left|\vec{E}\right|^2}{2} + \frac{\left|\vec{B}\right|^2}{2\mu_0}. \tag{4.22}$$

Le vecteur de Poynting est proportionnel au produit vectoriel du champ électrique et du champ magnétique

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}. \tag{4.23}$$

Le terme $-\vec{E} \cdot \vec{j}$ est un terme source. $\vec{E} \cdot \vec{j}$ est la puissance cédée par le champ électromagnétique aux charges par unité de volume.

$$\frac{\delta \mathcal{P}}{\delta \mathcal{V}} = \frac{1}{\delta \mathcal{V}} \sum_{i \in \delta \mathcal{V}} \left[q_i \vec{E}\left(\vec{r}_i\right)\right] \cdot \vec{v}_i = \vec{E}\left(\vec{r}_i\right) \frac{1}{\delta \mathcal{V}} \sum_{i \in \delta \mathcal{V}} q_i \cdot \vec{v}_i = \vec{E} \cdot \vec{j}. \tag{4.24}$$

Nous remarquerons qu'il n'a rien fallu ajouter de supplémentaire aux équations de Maxwell : la conservation de l'énergie est une conséquence des équations de Maxwell-Faraday, Maxwell-Ampère et de l'expression de la force de Lorentz.

4.4. Ondes planes progressives

4.4.1. Energie et quantité de mouvement

Energie

Pour une onde plane progessive, le champ électrique, le champ magnétique et le vecteur d'onde forment un trièdre direct et de plus :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \times \vec{E}. \tag{4.25}$$

On en déduit l'expression de l'énergie électromagnétique et du vecteur de Poynting

$$\mathcal{U}_{em} = \varepsilon_0 \frac{\left|\vec{E}\right|^2}{2} + \frac{\left|\frac{\vec{E}}{c}\right|^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2 \tag{4.26}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\left|\vec{E}\right|^2}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c \left|\vec{E}\right|^2 \vec{u}. \tag{4.27}$$

Par conséquent

$$\vec{\Pi} = c \mathcal{U}_{em} \vec{u}. \tag{4.28}$$

L'énergie électromagnétique se déplace à la vitesse de la lumière.

Quantité de mouvement

Regardons le travail et la force exercée par une onde électromagnétique sur une charge. L'onde exerce sur cette charge la force de Lorentz

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{4.29}$$

La puissance de cette force est

$$\mathcal{P} = \vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = \vec{v} \cdot q\vec{E} \tag{4.30}$$

Pour une onde plane progessive

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{u} \times \vec{E} \tag{4.31}$$

La force est donc

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \frac{1}{c}\left(\vec{u} \times \vec{E}\right)\right) && (4.32)\\ &= q\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{u}\left(\vec{v} \cdot q\vec{E}\right) - \frac{1}{c}\left(\vec{v} \cdot \vec{u}\right)\vec{E} && (4.33)\\ &= \vec{F}_e + \frac{1}{c}\mathcal{P}\vec{u} - \frac{1}{c}\left(\vec{v} \cdot \vec{u}\right)\vec{E} && (4.34) \end{aligned}$$

Le deuxieme terme est appelé pression de radiation.

Les ondes electromagnétiques transportent aussi de la quantité de mouvement : un objet qui absorbe ou réfléchit une onde électromagnétique subit une force : la pression de radiation. On montre que le vecteur de Poynting est aussi la densité de quantité de mouvement.

4.4.2. Le photon

La lumière est composée de photons. Pour une lumière monochromatique, l'énergie d'un photon de fréquence υ est

$$E = h\upsilon = \hbar\omega, \tag{4.35}$$

avec

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}. \tag{4.36}$$

où h est la constante de Planck et $\hbar$ la constante de Planck réduite. La quantité de mouvement d'un photon est donc

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} = \frac{h\upsilon}{c}\vec{u} \tag{4.37}$$

La lumière transposte aussi du moment cinétique. Un photon polarisé circulairement possede un moment cinétique $\hbar$.

Le flux de photons qui traverse une surface est le rapport de la puissance qui traverse cette surface et de l'énergie d'un photon :

$$\frac{\delta N}{\delta t} = \frac{\mathcal{P}}{h\upsilon} \tag{4.38}$$

4.5. Détection des ondes électromagnétiques

4.5.1. Mesure du champ électromagnétique

Les antennes permettent de mesurer directement l'amplitude du champ electromagnétique. Le champ électrique de l'onde électromagnétique met en mouvement les électrons d'un conducteur, le courant électrique ainsi créé est détecté directement.

4.5.2. Mesure de l'énergie

Les bolomètres mesurent l'énergie transportée par le champ électromagnétique. Le détecteur absorbe l'énergie apportée par le champ électromagnétique. La mesure de l'échauffement permet de déterminer l'intensité de l'onde électromagnétique.

4.5.3. Mesure du nombre de photons

L'arrivée d'un photon sur le détecteur excite un électron unique. Dans un photomultiplicateur, l'électron est arraché de la surface par effet photoélectrique, il est accéléré et arrache à son tour des électrons en arrivant sur une seconde electrode. Chaque photon donne lieu à une charge macroscopique directement détectable. Dans une photodiode ou un capteur CCD, le photon créee une paire électron - trou. Pour ces détecteurs la charge électrique créée par l'arrivée de la lumière est proportionelle au nombre de photons reçus. Ce type de détecteur a un seuil : pour provoquer la transition le photon doit avoir un énergie minimale.

Pour un photodétecteur telle une photodiode, chaque photon crée un électron. Pour une onde monochromatique le courant électrique i est donc

$$i = e\frac{\delta N}{\delta t} = \frac{e}{h\upsilon}\mathcal{I}. \tag{4.39}$$